DOS NUEVAS FÓRMULAS RELATIVAS AL ESCURRIMIENTO PERMANENTE I UNIFORME DE LOS LÍQUIDOS.

POR VÍCTOR FOURNIÉ

(*Annales des Ponts et Chaussées*, tercer trimestre, 1898)

I.—Escurrimiento por un tubo cilíndrico de seccion circular

1. Supongo que el escurrimiento permanente, por consiguiente uniforme en el caso definido, tiene lugar a boca llena.

Sea D, el diámetro del tubo en metros;

j, la pérdida de carga por unidad de lonjitud;

τ, la temperatura en grados, de la escala centígrada (la temperatura llamada absoluta $T = \tau + 273$);

u, la velocidad media en metros por segundo;

m, la constante de adherencia: depende de la constitucion física de la pared;

n, la constante de rugosidad: depende de la constitucion mecánica de la pared.

2. Considero, en primer lugar, el agua pura, no cargada de sólidos, ni en suspension, ni arrastrados sobre el fondo.

La fórmula empírica que propongo, es:

$$\tfrac{1}{4} Dj = \frac{10^{D\sqrt{\tau-1}} + 10^{-D\sqrt{\tau-1}}}{10^{D\sqrt{\tau-1}} - 1} (mu + nu^2)$$

Para simplificar el lenguaje, llamo y al coeficiente fraccionario del segundo miembro, el cual representa el efecto de la ajitacion del líquido en su seccion trasversal.

Si suponemos primero que $\tau=10°$, temperatura normal de los esperimentos en la zona templada, tenemos

$$y=\frac{10^{3D}+10^{-3D}}{10^{3D}-1}$$

Hé aquí el cuadro de los valores de y cuando D varia desde $0^m.00001$ hasta $0^m.50$:

D	y
$0^m.00001$	28571
0 .0005	578
0 .001	286
0 .01	28,3
0 .1	2,50
0 .2	1,42
0 .3	1,16
0 .4	1,08
0 .5	1,04

(Tiende hácia la unidad)

Se vé que para los tubos capilares i aun para los tubos de ménos de 1 a 2 centímetros de diámetro, se tiene próximamente $y=\frac{0,28}{D}$.

Si se consideran las esperiencias de Poiseuille, en las cuales D queda comprendido entre los límites anteriores, i en las cuales la velocidad es mui pequeña, se vé que y puede tomarse con su valor aproximado $\frac{0,28}{D}$ i que el término en u^2 puede despreciarse al lado del término en u. La fórmula se convierte entónces en:

$$\tfrac{1}{4} Dj = \frac{0,28}{D}.nu.$$

u es proporcional a D^2; por consiguiente, el caudal lo es a D^4. Esta es la tercera lei de Poiseuille (1).

Para los grandes diámetros, superiores a $0^m.60$, y casi llega a ser igual a 1. Entónces la fórmula se simplifica así:

$$\tfrac{1}{4} Dj = mu + nu^2,$$

la cual es la forma empírica de Prony.

Para los diámetros intermedios, entre 0^m10 i 0^m60 y decrece rápidamente cuando D aumenta. Se comprende, pues, que Du Buat haya tenido la idea de un término de correccion que contuviese a D en el denominador i que Darcy lo haya imitado. La fórmula de este último es de la forma:

$$\tfrac{1}{4} Dj = Ku^2 \left(1 + \frac{2,5}{100D}\right).$$

Este binomio se convierte, para:

$D = 0^m.10$	$0^m.20$	$0^m.30$	$0^m.40$	$0^m.50$
1 .25	1 .125	1 .083	1 .062	1 .05

El coeficiente y de mi fórmula varía, en el mismo intervalo, desde 2,50 hasta 1,04, es decir, que su variacion es doble. Pero, como multiplica, no a un simple término en u^2, sino a un binomio en u i u^2, su influencia es atenuada; de manera que este factor puede convenir tanto a los diámetros intermedios como a los diámetros mui pequeños i mui grandes. No trataré de comprobar la exactitud de mi

(1) *Informe* de Víctor Regnault en los *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences* de 1842, sesion del 26 de Diciembre.
Memoria de Poiseuille, publicada en el *Recueil des Savants étrangers*, t. IX, 1846. Las tres leyes se reducen a la espresion del caudal $Q = KjD^4$.
M. Couette (1888 i 1890) ha aplicado las leyes de Poiseuille a diámetros i a velocidades mayores (Véase el *Traité d'hydraulique* de M. Flamant, p. 57).

fórmula en esta parte intermedia, i puesto que los testos de la enseñanza oficial constatan que las fórmulas usadas están mui poco de acuerdo con los esperimentos, es a los resultados esperimentales a los que es menester referirse i de ninguna manera a las fórmulas corrientes.

Como primera aproximacion, comparando mi fórmula provista de los coeficientes numéricos siguientes (unidades: metro i segundo):

$$\tfrac{1}{4} Dj = y\ (0{,}000.005u + 0{,}000.342u^2),$$

de donde el caudal:

$$Q = 0.00577 D^2 \left[\sqrt{1 + \frac{13.600.000\, Dj}{y}} - 1 \right]$$

con las tablas prácticas que se encuentran en el *Aide-Mémoire* de la Hütte (edicion francesa, 1892), pienso que los coeficientes anteriores pueden aceptarse como correspondiendo a un promedio entre la fundicion nueva i la fundicion concrecionada.

3. Poiseuille ha reconocido que la influencia de la temperatura es mui grande. Para el agua a 40° el caudal dado por los esperimentos es mas del doble del caudal de agua a 10°.

Obtengo este resultado tomando a $\sqrt{\tau - 1}$ como coeficiente de D.

Para $\tau =$	$4°$, $\sqrt{3} = 1{,}73$	$y = \dfrac{0{,}48}{D}$	cuando D es mui pequeño.
„	$10°$, $\sqrt{9} = 3$	$y = \dfrac{0{,}28}{D}$	„ „ „ „
„	$26°$, $\sqrt{25} = 5$	$y = \dfrac{0{,}17}{D}$	„ „ „ „
„	$37°$, $\sqrt{36} = 6$	$y = \dfrac{0{,}14}{D}$	„ „ „ „

4. Las leyes de Poiseuille han sido verificadas para el éter, el alcohol i las diferentes mezclas de alcohol i agua (1).

(1) *Rapport* de Víctor Régnault precitado.

Pero no sucede lo mismo con el mercurio: la velocidad media de escurrimiento, en vez de ser proporcional a D^2, ha resultado proporcional a D.

Refiriéndome a la fórmula que he propuesto, salvo el cambio de los datos numéricos relativos al agua, hago $m=0$, puesto que no hai adherencia.

Entónces toma la forma $\frac{1}{4}Dj=ynu^2$, en la cual, para los diámetros capilares, $y=\frac{K}{D}$, dependiendo K sólo de la temperatura. Así:

$$\tfrac{1}{4}Dj=\frac{nK}{D}u^2.$$

u es entónces proporcional a D en este caso. Es ésta una verificacion interesante.

En vista de la estension de la fórmula aplicable al agua a otros líquidos, conviene examinar mas prolijamente la fórmula del coeficiente calórico de D en y.

Estoi dispuesto a pensar que en el radical deberia figurar, en lugar de $\tau-1$, $T-T_c-1$, siendo T la temperatura absoluta, i T_c el valor de T en el punto crítico inferior, es decir, en el punto en que el cuerpo solidificado se liquida.

La fórmula jeneral seria, pues:

$$\tfrac{1}{4}Dj=\frac{a^{D\sqrt{T-T_c-1}}+a^{D\sqrt{T-T_c-1}}}{a^{D\sqrt{T-T_c-1}}}(mu+nu^2)$$

en la cual m i n tienen el significado definido mas arriba.

T_c es la temperatura absoluta en el punto crítico inferior.

a es un dato físico del líquido considerado. Parece que se le puede tomar como la medida de su movilidad, como la inversa de su viscosidad.

II.—ESCURRIMIENTO POR UN CANAL DESCUBIERTO

5. Considero ahora el escurrimiento permanente i uniforme del agua en un canal cilíndrico descubierto.

Me limito al caso mas simple, el de un lecho mui ancho con fondo horizontal de manera que se pueda despreciar la influencia de las orillas.

Llamo i la pendiente lonjitudinal, h la altura del agua.

La fórmula debe contener la temperatura; en lugar de la funcion y dada para las cañerías, será necesario afectar a los coeficientes de u i de u^2 por factores ψ_1 i ψ_2, que dependen positivamente de T i mui probablemente de h tambien. Pero no se tiene para los canales descubiertos, esperimentos análogos a las bellas investigaciones de Poiseuille sobre los tubos, i el estudio no se puede llevar tan léjos como en el caso anterior.

La fórmula que propongo es la siguiente:

$$hi=\psi_1\, mu+\psi_2\, n\,(3{,}3+\log h)u^2,$$

de donde:

$$Q=\frac{hl}{2\Psi_2\, n(3{,}3+\log h)}\left[\sqrt{\Psi_1{}^2 m^2+4\Psi_2 n(3{,}3+\log h)hi}-\Psi_1 m\right]$$

Con los valores $\psi_1\, m=\frac{1}{900}$ i $\Psi_2 n=\frac{1}{10800}$, la fórmula anterior traduce fielmente los resultados de la observacion, especialmente sobre el Garona en Langon i sobre el Ródano en Valence: mucho mejor que las fórmulas empíricas propuestas anteriormente.

En los grandes rios, para las honduras de 10 a 20 i 30 metros, que se encuentran, por ejemplo, en el Mississipi, el valor creciente de $\log h$ en el denominador servirá de moderador, i llenará el papel que los señores Humphreys i Abbot, en sus bellas investigaciones, han tratado de hacer representar a un denominador $\sqrt{i}$, miéntras que $3{,}3+\log h$ puede escribirse $\log\left(\frac{h \text{ metros}}{0^{\text{m}}.0005}\right)$. Ahora bien, $0^{\text{m}}.0005$

es el menor diámetro de los considerados por Poiseuille; es este un número mas bajo, del cual las leyes pueden esperimentar una perturbacion por entrar en juego las acciones moleculares. Este logaritmo de razon es de la forma del $\log\left(\frac{R}{r}\right)$, coeficiente de la enerjía de un torbellino entre dos cilindros concéntricos de radios R i r. Ahora bien, aquí se trata efectivamente de la enerjía de la ajitacion jiratoria consecutiva al choque debido a la aspereza del fondo, con relacion a un eje horizontal que pase por el lugar del choque. Esta enerjía es, sin duda, representada por este logaritmo multiplicado por el área de espansion; se la reduce al órden de las fuerzas dividiéndola por un camino recorrido, i como en seguida se divide a las fuerzas retardatrices por el perímetro mojado para llegar a la forma $Ri = au + bu^2$, se vé que es justamente el logaritmo mismo el que debe quedar en la fórmula como multiplicador de u^2, ademas de un coeficiente constante.

6. La intervencion de la temperatura me parece apropiada para esplicar por qué en las grandes corrientes de agua los aforos presentan discordancias tan grandes. En circunstancias análogas, por lo demas, los injenieros lombardos dan una espresion $u = 50\sqrt{hi}$ i M. Graeff, para las aguas frias del Loira i del Allier superior, es conducido a reemplazar el coeficiente 50 por sólo 35. Las observaciones sobre el Ganjes, el Irrawaddy, el Mississippi dan caudales mas grandes que los que se constatan en nuestros rios europeos de la zona templada. Se puede pensar que esta consideracion es apropiada para reducir a una lei comun i relativamente simple los diversos resultados de las observaciones.

Debo limitarme a esta indicacion breve, haciendo notar, sin embargo, que en la determinacion de las funciones Ψ_1, Ψ_2 se podrá tomar como variable independiente ya la temperatura absoluta T, ya la fuerza elástica máxima del vapor, medida en milímetros de mercurio, F.

Para facilitar el estudio segun este último camino, señalo el hecho que la fórmula

$$F=\phi\times 4^{-\sqrt{\left(\frac{\theta}{T}\right)^5-1}}$$

o lo que es lo mismo

$$\log\phi-\log F=0.60\sqrt{\left(\frac{\theta}{T}\right)^5-1},$$

interpreta bien los esperimentos de Régnault sobre el vapor de agua sobre 4° *C.*, i se estiende hasta el punto crítico con desviaciones en mas o en ménos que no pasan de 3 por ciento.

Esta espresion se hace nula para $T=0$, de manera que en el caso de sobrefusion, la lei puede considerarse aplicable bajo el punto crítico inferior; pero no sin perturbacion.

Ella da, para $T=\theta$, punto crítico superior, $F=\phi$.

Sobre este punto crítico F se hace imajinaria. Esto se debe a que F es la tension del vapor saturado i no hai saturacion posible mas allá del punto crítico.

La fórmula anterior pone en presencia a $\frac{F}{\phi}$ i $\frac{T}{\theta}$.

Pone, pues, en relieve la nocion de los estados correspondientes, introducida por Van der Waals, i será fácil verificar si otros cuerpos siguen la misma lei, conservando los mismos datos numéricos.

7. La cuestion examinada a la lijera en la presente nota es mui compleja para ser tratada metódicamente, principiando por los casos mas sencillos.

Pienso que las pequeñas corrientes de agua descubiertas, a las cuales M. Bazin acaba de atribuir (*Annales des Ponts et Chaussées*, 4.° trimestre, 1897) una nueva fórmula empírica, que sigue a muchas otras propuestas por diversos injenieros, corresponden a un caso mucho mas complicado, no sólo por la accion de las paredes laterales, sino tambien porque se hace indispensable tomar en cuenta aparte la resistencia en la superficie llamada libre, miéntras que en las corrientes de agua de seccion rectangular indefinida, esta resistencia i la del fondo pueden ser confundidas.

Ahora bien, esta resistencia, que los señores Humphreys i Abbot han tenido mucha razon para afirmar que existe i para poner en evidencia, en contra de las opiniones de los injenieros europeos, i cuya existencia es certificada por las observaciones que manifiestan que el eje de la parábola de las velocidades sobre una vertical está debajo de la superficie, aun cuando no haya brisa,—esta resistencia no ha sido avaluada todavía con la precision necesaria (1).

Parece que los señores Humphreys i Abott le han asignado un valor exajerado al igualarla a la resistencia de las paredes sólidas, puesto que debe medirse por la tension superficial del líquido considerado. Pero cuando se hayan modificado las fórmulas en el sentido que he tratado de señalar para el caso mas sencillo, acordando una parte considerable a la ajitacion en la seccion, debida a la resistencia de las paredes, las perturbaciones serán descartadas i se llegará a conocer las leyes verdaderas, aproximadas, sin duda, pero suficientes para la práctica.

Un esfuerzo en esta direccion se recomienda a los jóvenes injenieros, puesto que la hidráulica de las corrientes de agua no da a las necesidades de la práctica, en este momento, una satisfaccion comparable a la que han realizado la teoría de las ondas líquidas, la de las vertederas, etc.

D. C. O.

---

(1) Insisto sobre este punto desde 1866 (*Résumé des expériences hydrauliques faites par le Gouvernemnet américain sur le Mississippi, et Remarques...* p. 114 a 116, Dunod, ed.)

ADICION A LA NOTA ANTERIOR POR VÍCTOR FOURNIÉ

(*Annales des P. et Ch.*, primer trimestre, 1899)

La Lei de Poiseuille, segun la cual un tubo capilar da un caudal de agua u otros líquidos proporcional a la diferencia de tension en las estremidades, es aplicable a los filtros. Tambien es aplicable al éter substratum de las corrientes eléctricas, i se llama en este caso la lei de Ohm, aplicable a las corrientes contínuas.

Esta concordancia merecia ser señalada, pues hace mas íntima una analojía que ordinariamente se indica bajo reservas talvez exajeradas.

D. C. O.