Fco. Javier Domínguez S.

Curso de Hidráulica General

(*Continuación*)

---

18. Variación de la suma de Bernoulli en corrientes abiertas. Escurrimiento crítico. Velocidad de propagación de las ondas.—Como se ha hecho notar en el ejemplo anterior, en los canales o corrientes abiertas que escurren con movimiento permanente, la cota piezométrica que corresponde a cada filete es la cota del eje hidráulico, en la sección, si descartamos la altura de presión atmosférica. De modo que la suma de Bernoulli, B, referida al fondo, vale: (*Fig. 20*)

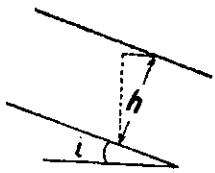


Fig. 20

$$B = h \cos i + \alpha \frac{U^2}{2g}$$

En las corrientes abiertas el ángulo i que ellas forman con la horizontal es siempre muy pequeño; luego el coseno vale prácticamente la unidad. De modo que sin error apreciable puede ponerse siempre:

$$B = h + \alpha \frac{U^2}{2g} \qquad (21$$

A la permanencia del escurrimiento corresponde la invariabilidad del gasto:

$$Q = \Omega U = cte.$$

Si suponemos que h aumenta tendiendo a infinito, como Ω crece con h, U debe disminuir tendiendo a *cero*. Si U es *cero*, $U^2/2g$ también lo es; por lo tanto, la suma de Bernoulli se reduce al primer sumando y vale infinito. Si a la inversa, h tiende a *cero*, U tiende a infinito, y en consecuencia, la suma de Bernoulli también vale infinito en este caso. Entre estos dos valores extremos de h, B tiene valores finitos, y hay, por lo tanto, un valor de h para el cual B es un mínimo.

Para encontrar la condición de mínimo del Bernoulli, o sea la de la *energía*

mínima por unidad de peso, a gasto constante, bastará derivar la ecuación (*21*, e igualar a *cero* la derivada:

$$\frac{dB}{dh}=1+\frac{U}{g}\frac{dU}{dh}=0$$

Hemos considerado α igual a la unidad para hacer la derivada. Como el gasto es constante e igual a ΩU, tenemos:

$$\frac{dQ}{dh}=0=\Omega\frac{dU}{dh}+U\frac{d\Omega}{dh}$$

de donde

$$\frac{dU}{dh}=-\frac{U}{\Omega}\frac{d\Omega}{dh}$$

Un elemento de sección $d\Omega$ es el producto del ancho superficial l por la altura elemental dh. Luego:

$$l=\frac{d\Omega}{dh}$$

y por lo tanto

$$\frac{dU}{dh}=-U\frac{l}{\Omega}$$

Introduciendo este valor arriba, tendremos:

$$1=\frac{U^2}{g}\frac{l}{\Omega}$$

$$U=\sqrt{g\frac{\Omega}{l}} \qquad (22$$

Las corrientes naturales no escurren, en general, con velocidades tan grandes como la dada por esta expresión. Si llega la Naturaleza a producirlas y en corrientes variadas artificiales provienen de una aceleración de la corriente; de modo que α vale prácticamente *uno*, como se aceptó.

La razón Ω/l es una longitud; es la profundidad H que corresponde a un rectángulo de superficie Ω y ancho l. Por eso se le suele llamar *profundidad media*.

El gasto es

$$Q=\Omega\sqrt{g\frac{\Omega}{l}} \qquad (23$$

ecuación que revela que para cada gasto y forma de lecho dados, quedan definidas las magnitudes de Ω y del ancho superficial l que corresponden a la energía mínima.

La altura de velocidad que corresponde a la velocidad del mínimo de energía es:

$$\frac{U^2}{2g} = \frac{\Omega}{2l} = \frac{H}{2} \qquad (24$$

La suma de Bernoulli mínima es entonces

$$B = h + \frac{\Omega}{2l} \qquad (25$$

La suma de Bernoulli mínima separa las corrientes en dos grupos de caracteres antagónicos: las de profundidad mayor que la que a ésta corresponde, llamadas *ríos*, aumentan de energía unitaria con la altura; y las de menor profundidad o *torrentes*, disminuyen su suma de Bernoulli, contada desde el fondo, cuando su altura aumenta. El tránsito de un tipo de corriente a otro es una *crisis;* por lo tanto, el escurrimiento que se verifica con suma de Bernoulli mínima se llama *escurrimiento crítico*. La profundidad de él, como también su velocidad, son llamadas críticas.

Cualquiera energía unitaria o suma de Bernoulli de la corriente no es pues compatible con el gasto de un canal dado; pues esa suma de Bernoulli no puede descender del valor crítico. En consecuencia, si las condiciones de escurrimiento nos fijan el Bernoulli en una sección de aguas abajo, y hay aguas arriba de aquella otra de menor ancho o cuya cota de fondo es más alta, puede suceder que a ésta corresponda, referido al fondo de la de aguas abajo, un Bernoulli mínimo mayor que el existente en la sección de aguas abajo. En estas condiciones debe existir, Bernoulli mínimo en la sección de aguas arriba (1).

El razonamiento anterior, que es una aplicación del principio de mínimo efecto, está ampliamente demostrado por la experiencia. Esto equivale a decir que hay casos en que el escurrimiento se desliga, como dice Böss, y es inútil pretender encontrar la velocidad, profundidad, etc., de una sección de aguas arriba, a través de la ecuación de la conservación de la suma de Bernoulli, sin antes haberse cerciorado que en todas las secciones dicha conservación es posible porque las sumas de Bernoulli son mayores que la crítica. Muy a menudo se encuentra esta desligazón del eje hidráulico en la Naturaleza. Es frecuente en vertederos y en angostamientos, como el que se produce bajo las pilas de un puente. Es útil hacer notar, desde luego, la frecuencia con que se ha errado al no considerar esta circunstancia y que no pueden usarse muchas fórmulas que no la tomen en cuenta. Iremos viendo, en

---

(1) Análogos raciocinios hacen M. Casler en Transactions of American Society of Civil Engineers—tomo 94—Año 1930—en un artículo «Stream flow in general terms», pág. 12; y Böss en Berechuung der Wasserspiegellage (Karlsruhe 1919), págs. 36, 52 y en todo el folleto que está inspirado en estas ideas demostradas experimentalmente. Es, como dice Böss en la página 52 de su folleto, una extensión a la Hidráulica del principio de Gauss, de la máxima economía o del mínimo efecto.

ejemplos, durante el Curso, este interesante asunto y de paso haremos la crítica de algunas expresiones experimentales que no la tuvieron en vista (1),

Otro hecho caracteriza también el escurrimiento crítico; su velocidad es la misma con que avanza una onda de traslación. Como las variaciones de una corriente se trasmiten por medio de ondas positivas o negativas de traslación, se sigue de aquí que éstas que podrán remontar los ríos, cuya velocidad es menor que la crítica, no podrán hacerlo en los torrentes, y que por lo tanto, los ríos dependen de variaciones de aguas abajo y los torrentes no. Producido en una sección el escurrimiento crítico, aguas arriba quedará aislado de aguas abajo.

Una onda de traslación es una elevación o intumescencia (onda positiva) o una depresión (onda negativa) que se propaga conservando su forma geométrica. Debe su origen, en el primer caso, a la agregación brusca de un volumen de agua o a la introducción de un cuerpo sólido, y la onda negativa a la extracción repentina de parte del agua.

Las ondas se van trasladando y, al mismo tiempo, extinguiendo por efecto de las resistencias pasivas. Su paso por una sección exige un movimiento en el agua, en el mismo sentido de la traslación de ella en la onda positiva y en sentido inverso en la negativa. El movimiento real del agua es de velocidad u mucho menor que la V con que la onda se propaga. Esta última es la velocidad de la forma geométrica y para no confundirla con el movimiento del agua se le llama *celeridad* o *rapidez* de traslación. (*Fig. 21*). Si por hipótesis, para simplicidad de la demos-

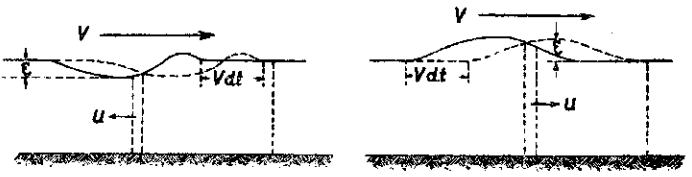


Fig. 21

tración, suponemos un canal de sección Ω de forma cualquiera, en reposo antes del paso de la onda; ésta de altura despreciable ε (negativa en la onda negativa), y el canal adquiere al paso de la onda una velocidad u, igual en toda la sección, si llamamos l el ancho superficial y consideramos la masa líquida comprendida entre una sección anterior a la onda y otra en el medio de ella, despreciando εl, al lado de Ω, podremos escribir.

$$V\,dt\;\varepsilon\,l = u\,dt\;\Omega$$

expresión debida a que en un tiempo dt el volumen de la intumescencia en la

(1) Cuando en un angostamiento o sobre una barrera se produce Bernoulli crítico por las razones indicadas, el exceso de este Bernoulli sobre el de aguas abajo, se gasta en remolinos de eje vertical y horizontal. Éstos remolinos han sido ubicados y experimentados por Rehbock en Karlsruhe (desde 1917 hasta ahora), que los llama rodillos, (en alemán «Walzen», que los americanos traducen literalmente «rollers»). Más adelante aludiremos a ellos.

onda positiva, de que ha aumentado la masa considerada, ha sido obtenido porque ha entrado en forma de un prisma de altura $u\,dt$ y de sección Ω.

En la onda negativa, por la depresión, la masa considerada ha disminuído un volumen $V\,dt\,\varepsilon\,l$ en el tiempo dt, lo que ha originado la salida de un prisma $u\,dt\,\Omega$. De esa expresión se obtiene:

$$V = \frac{u\,\Omega}{\varepsilon\,l} \qquad\qquad u = \frac{V\,\varepsilon\,l}{\Omega}$$

que nos dice que la razón entre la celeridad de la onda y la velocidad real de las moléculas líquidas guarda la relación de la sección total Ω del canal con la de la onda $\varepsilon\,l$, por hipótesis, despreciable.

Para encontrar el valor de V aplicamos el teorema de las cantidades de movimiento a la masa líquida.

$$\frac{\gamma}{g}\,V\,dt\,(\Omega + \varepsilon\,l)$$

cubierta por la onda en el tiempo dt. El incremento de velocidad que recibe esta masa en el tiempo dt es la velocidad u; haciendo la proyección sobre un eje horizontal, despreciando $\varepsilon\,l$ al lado de Ω, la derivada respecto al tiempo de las cantidades de movimiento será:

$$\frac{\gamma}{g}\,V\,\Omega\,u$$

o reemplazando el valor de u

$$\frac{\gamma}{g}\,V^2\,\varepsilon\,l$$

Las fuerzas que dan proyección son las presiones hidrostáticas en las caras terminales, en la anterior desde el nivel libre del canal y en la posterior desde el nivel en medio de la onda. La diferencia entre ambas presiones totales es $\gamma\,\Omega\,\varepsilon$, si volvemos a despreciar $\varepsilon\,l$ al lado de Ω. El teorema dice, finalmente:

$$\frac{\gamma}{g}\,V^2\,\varepsilon\,l = \gamma\,\Omega\,\varepsilon$$

de donde

$$V = \sqrt{g\,\frac{\Omega}{l}} \qquad (26$$

que es la expresión de la velocidad crítica.

Las experiencias de Bazin comprueban con gran exactitud la fórmula anterior, este experimentador comparando con las celeridades medidas la expresión

$$\sqrt{g\left(\frac{\Omega}{l}+\varepsilon\right)}+U \qquad (26\,a$$

no encontró discrepancias que excedan al *1,5* %. En esta expresión U es la velocidad del canal, que en sus experiencias no estaba en reposo, y ε, como se ha dicho, la altura de la onda.

EJEMPLO.—En un canal rectangular de *2,5* m. de ancho se han medido ondas que remontan la corriente con velocidad de *1,8* m : seg. y ondas descendentes con velocidad de *3,3* m : seg. Determinar el gasto del canal.

Si llamamos U la velocidad media del canal y V la velocidad de la onda, tenemos las ecuaciones:

$$V+U=3{,}3$$

$$V-U=1{,}8$$

de donde $V=2{,}55$ m : seg.

reemplazando el valor de V de la fórmula (*26* $V=\sqrt{g\frac{\Omega}{l}}$ notando que en sección rectangular $\frac{\Omega}{l}$ es igual a la profundidad h, se tendrá:

$$2{,}55=\sqrt{g\,h}$$

$$h=0{,}662 \text{ m.}$$

La sección del canal es, pues, $\Omega=2{,}5\times 0{,}662=1{,}655$ m² y su velocidad, deducida del sistema de ecuaciones, es $U=0{,}75$ m : seg.

El gasto del canal, en consecuencia, es:

$$Q=\Omega\,U=1{,}655\times 0{,}75=1{,}24 \text{ m}^3 : \text{seg.}$$

19. Cálculo de la profundidad crítica y del Bernoulli crítico. Ejemplos y aplicaciones.—Interesa generalmente en las cuestiones de Hidráulica el cálculo de la profundidad crítica y de la suma de Bernoulli crítica que corresponden a un gasto conocido en una cuneta o lecho de forma dada.

Si la sección es de forma rectangular de ancho l, las condiciones de escurrimiento crítico se simplifican, pues la profundidad media H es la profundidad crítica h_c. Se tiene, pues:

$$u_c=\sqrt{g\,h_c}$$

$$\frac{u_c^2}{2\,g}=\frac{h_c}{2}$$

$$B_c=\frac{3}{2}h_c \qquad (27$$

El gasto en crisis valdrá: $Q = l\, h_c \sqrt{g\, h_c}$

Llamando $q = \frac{Q}{l}$, el gasto por unidad de ancho, se tiene:

$$q = h_c \sqrt{g\, h_c}$$

$$h_c = \sqrt[3]{\frac{q^2}{g}} = 0{,}468 \cdot q^{\frac{2}{3}} \qquad (28$$

expresión que revela que la profundidad crítica sólo depende del gasto por unidad de ancho.

En la **Tabla N.° 1**, la tercera columna da los gastos por metro de ancho correspondientes a las alturas críticas de la primera columna.

En los canales parabólicos en que:

la sección es: $\Omega = \frac{2}{3}\, l\, h_c$

la razón $\frac{\Omega}{l}$ vale: $\frac{\Omega}{l} = \frac{2}{3} h_c$

la velocidad crítica es: $u_c = \sqrt{g \frac{2}{3} h_c}$

la altura de velocidad crítica es: $\frac{u_c^2}{2g} = \frac{h_c}{3}$

la suma de Bernoulli crítica: $B_c = \frac{4}{3} h_c \qquad (29$

el gasto crítico: $Q = \frac{2}{3}\, l\, h_c \sqrt{g \frac{2}{3} h_c}$

y la profundidad crítica: $h_c = \sqrt[3]{\frac{27}{8} \frac{Q^2}{g\, l^2}} \qquad (30$

o sea $h_c = \frac{3}{2} \sqrt[3]{\frac{Q^2}{g\, l^2}} = 0{,}70 \sqrt[3]{\frac{Q^2}{l^2}} \qquad (30\,a$

es decir, que la profundidad crítica de un lecho parabólico es los 3/2 de la del rectángulo de igual ancho superficial.

Las secciones en segmentos de círculos son asimilables a secciones parabólicas cuando la altura es menor que el radio. También lo serán los segmentos de pequeña flecha de los lechos naturales.

La **Tabla N.° 2** da los elementos necesarios para el cálculo de profundidades críticas en lechos de forma circular. Estos elementos aparecen, dividiendo a la magnitud que interesa, la potencia del radio necesaria para dar un coeficiente numérico, así h, altura, y l, ancho superficial, van divididos por r y Ω por r^2. Adjunto a la tabla va un gráfico que facilita la interpolación.

Las secciones triangulares que tienen poca importancia práctica, nos servirán para estudiar las secciones trapeciales. En ellas la sección es:

$$\Omega = h^2 \, tg \, \alpha$$

$tg \, \alpha$ es la inclinación de uno de los lados con la vertical si ambas inclinaciones son iguales o la semi suma de ellas si son distintas.

El ancho superficial es: $l = 2 \, h \, tg \, \alpha$

la altura media es: $\dfrac{\Omega}{l} = \dfrac{h}{2}$

la velocidad crítica: $u_c = \sqrt{\dfrac{g \, h_c}{2}}$

la altura de velocidad crítica: $\dfrac{u_c^2}{2g} = \dfrac{h_c}{4}$

la suma de Bernoulli crítica: $B_c = \dfrac{5}{4} h_c$ (31

el gasto crítico es, por lo tanto, $Q_c = h_c^2 \, tg \, \alpha \sqrt{g \dfrac{h_c}{2}}$

Llamaremos gasto por unidad de inclinación a la razón

$$Q_\alpha = \frac{Q}{tg \, \alpha} = h_c^2 \sqrt{g \frac{h_c}{2}}$$

La profundidad crítica vale $h_c = \sqrt[5]{\dfrac{2 \, Q^2}{g \, tg \, \alpha}} = 0{,}728 \, Q_\alpha^{\frac{2}{5}}$ (32

La **Tabla N.° 1** da los gastos por unidad de inclinación en la cuarta columna, correspondientes a las alturas de la primera.

Las secciones trapeciales, compuestas de parte rectangular y parte triangular, han de tener una suma de Bernoulli crítica comprendida entre $1{,}5$ y $1{,}25$ h_c y profundidades críticas menores que las correspondientes a rectángulos de igual

base. La sección del trapecio es: $\Omega = b\,h + h^2\,tg\,\alpha$, ($b$ es la base y $tg\,\alpha$ la semi suma de las inclinaciones de los lados). El ancho superficial es: $l = b + 2\,h\,tg\,\alpha$.

La velocidad crítica es: $$u_c = \sqrt{g \cdot \frac{b\,h_c + h_c^2\,tg\,\alpha}{b + 2\,h_c\,tg\,\alpha}}$$

El gasto en crisis será: $Q = (b\,h_c + h_c^2\,tg\,\alpha)\sqrt{g\,\frac{b\,h_c + h_c^2\,tg\,\alpha}{b + 2\,h_c\,tg\,\alpha}}$

De esta ecuación se podrá obtener por tanteos h_c si se conoce Q; cosa en todo caso larga.

La suposición de que el gasto que pasa por la sección trapecial en crisis es la suma de los gastos que con la misma altura pasan por el rectángulo de ancho b y los triángulos de inclinación $tg\,\alpha$, da un error máximo de 5 % por defecto en el caso más desfavorable que se produce cuando el ancho superficial $l = 2{,}786\,b$ (1). Esta suposición daría:

$$Q = b\,h_c\sqrt{g\,h_c} + h_c^2\,tg\,\alpha\sqrt{g\,\frac{h_c}{2}}$$

Más fácil es calcular con la fórmula aproximada propuesta por el profesor Salas Edwards (2) que dice que el inverso del cuadrado de la profundidad crítica es igual a la suma de los inversos de los cuadrados de las profundidades críticas que produciría todo el gasto pasando por el rectángulo y todo el gasto pasando por el doble triángulo de los extremos.

$$\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{h_b^2} + \frac{1}{h_\alpha^2} \qquad (33$$

Esta expresión que evidentemente es exacta en los casos extremos $b = 0$ y $tg\,\alpha = 0$, produce un error que en el caso más desfavorable $\left(h_b/h_\alpha = 0{,}50\right)$ llega al tres por ciento del valor exacto de h_c. En la **Tabla N.° 1** se encuentran en la última columna los valores de $1/h^2$ correspondientes a todos los gastos por unidad de ancho y por unidad de inclinación (3).

---

(1) Véase escurrimiento variado—Salas Edwards—1923—página 63.

(2) Escuerimiento variado, pág. 64. Esta ecuación es:

$$\frac{1}{h_c^2} = \frac{1}{\left(\frac{Q^2}{g\,b^2}\right)^{\frac{2}{3}}} + \frac{1}{\left(\frac{2\,Q^2}{g\,tg^2\,\alpha}\right)^{\frac{2}{5}}} = \frac{4{,}56}{q^{\frac{4}{3}}} + \frac{1{,}89}{Q_\alpha^{\frac{4}{5}}} \qquad (33a$$

(3) King, en Handbook of Hydraulics (1929), trae tablas para el cálculo de profundidades críticas en secciones trapeciales (Tabla 109, pág. 349).

EJEMPLOS.—Por una sección parabólica cuya ecuación, referida a la vertical y a la tangente horizontal que pasa por el punto más bajo es

$$h = \frac{1}{4}\left(\frac{l}{2}\right)^2$$

pasa un gasto de $0{,}425$ m³/seg. Calcular la profundidad crítica.

La expresión de la profundidad crítica en lechos parabólicos dada anteriormente, es:

$$h_c = \frac{3}{2}\sqrt[3]{\frac{Q^2}{g\,l^2}}$$

o sea,

$$h_c^3 = \frac{27}{8}\,\frac{Q^2}{g\,l^2}$$

Poniendo aquí el valor de l de la cuneta de nuestro ejemplo

$$l^2 = 16\,h_c$$

tendremos

$$h_c^4 = \frac{27}{8}\,\frac{Q^2}{16\,g}$$

Reemplazando valores

$$h_c = \sqrt[4]{\frac{27}{8\times 16\times 9{,}8}}\sqrt{Q} = 0{,}383\sqrt{0{,}425} = 0{,}250 \text{ m.}$$

¿Cuál es la profundidad crítica de un gasto de 1 m³ : seg. en una cuneta rectangular de 2 m. de ancho?

En la **Tabla N.° 1** frente al gasto por metro de ancho $q = 1/2 = 0{,}50$, está $h_c = 0{,}295$, haciendo una interpolación.

¿Cuál es la profundidad crítica de un gasto de 2 m³ : seg. en una cuneta trapecial de $1{,}6$ m. de base y taludes de 1 de base por 2 de altura?

Usando la **Tabla N.° 1** se encuentra:

El gasto por unidad de ancho $q = \frac{2}{1{,}6} = 1{,}25$ m² : s

$$\frac{1}{h_b^2} = 3{,}04$$

El gasto por unidad de inclinación $Q_\alpha = \frac{2}{\frac{1}{2}} = 4$ m³ : s

$$\frac{I}{h_\alpha^2} = 0{,}62$$

$$\frac{I}{h_c^2} = 4{,}02$$

y según la tabla se encuentra $h_c = 0{,}50$ m.

Con este valor de h_c, si verificamos el gasto dado, tendremos:

$$\Omega = 1{,}6 \times 0{,}5 + 0{,}5^2 \times \frac{1}{2} = 0{,}925 \text{ m}^2$$

$$l = 1{,}6 + 2 \times 0{,}5 \times \frac{1}{2} = 2{,}1 \text{ m.}$$

$$\frac{\Omega}{l} = 0{,}44 \text{ m.}$$

$$u_c = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}} = 2{,}08 \text{ m : s}$$

$$Q = \Omega \sqrt{g \frac{\Omega}{l}} = 1{,}94 \text{ m}^3 \text{ : seg.}$$

en vez de 2 m³ : seg. con un error de 3 % debido en parte a la interpolación. La verdadera h_c es 0,512 m. que se diferencia de la anterior en 2,34 % únicamente.

¿Cuál es la profundidad crítica del gasto de 1 m³ : s pasando por un acueducto circular de 1,5 m. de diámetro?

Se resuelve por tanteos dándose alturas, de las cuales se pasa a la altura relativa $\frac{h}{r}$ de la **Tabla N.° 2** que nos da los demás valores: $\frac{\Omega}{r^2}$ y $\frac{\Omega}{lr}$. En el cuadro adjunto van los tanteos.

h	$\frac{h}{r}$	$\frac{\Omega}{r^2}$	Ω	$\frac{\Omega}{lr}$	$\frac{\Omega}{l}$	$\sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$	$\Omega \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$
0,75	1,0	1,571	0,884	0,785	0,589	2,40	2,12
0,375	0,5	0,614	0,346	0,353	0,265	1,62	0,573
0,500	0,666	0.930	0,523	0,481	0,360	1,88	0,983

La última columna del cuadro nos dá el gasto en crisis. En nuestro acueducto a $h_c = 0{,}5$ m. corresponde $Q = 0{,}983$. Interpolando se encuentra que para el gasto $Q = 1$ m³ : s corresponde $h_c = 0{,}51$ m.

La *figura 22* muestra gráficamente la variación de la suma de Bernoulli con la profundidad. Se ve que la curva tiene dos asintotas: la $B=h$ y el eje de las abscisas; pues cuando $h=\infty$, $U^2/2g=0$ y a la inversa si $h=0$, $U^2/2g=\infty$ y $B=\infty$.

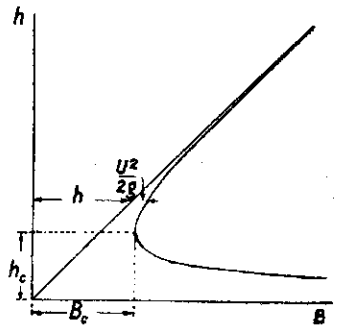


Fig. 22

También, como se sabe, la curva manifiesta la rápida variación de h sin variación apreciable de B en las cercanías del mínimo de la suma de Bernoulli.

Conociendo la suma de Bernoulli se pueden calcular profundidades de corrientes abiertas de sección rectangular de ancho l, en que se conoce fácilmente el gasto por unidad de ancho; sin resolver la ecuación de tercer grado en h:

$$B = h + \frac{U^2}{2g} = h + \frac{Q^2}{2g\,l^2\,h^2}$$

Notando que según la ecuación (28:

$$h_c^3 = \frac{Q^2}{l^2 g}$$

se obtiene reemplazando:

$$B = h + \frac{h_c^3}{2h^2}$$

Util resulta dividir esta ecuación por h_c:

$$\frac{B}{h_c} = \frac{h}{h_c} + \frac{h_c^3}{2h^2} \qquad (34$$

En la **Tabla N.° 3** están tabulados los valores de B/h_c correspondientes a las profundidades relativas h/h_c. El gráfico adjunto a la tabla también puede usarse con ese objeto (1).

EJEMPLO.—Un canal de *1* m. de ancho (*fig. 23*) se ensancha a *2* m. sin que el fondo varíe de cota. El gasto que escurre es de *1,2* m³/seg. Se pide determinar la profundidad en la sección de *1* m. de ancho si en la de *2* m. es de *1,10* m. y es aplicable al teorema de Bernoulli.

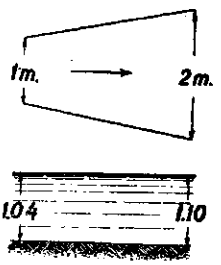


Fig. 23

(1) King en Handbook of Hydraulics (1929), trae tablas para determinar las profundidades de igual Bernoulli en secciones rectangulares (Tabla 106, pág. 345), en secciones trapeciales (Tabla 107, págs. 346, 347 y 348), y aún en seeciones triangulares, (Tabla N.° 108, pág. 349).

La velocidad en la segunda sección es

$$U = \frac{1,2}{2,2} = 0,545 \text{ m:seg.}$$

y según la **Tabla N.° 1**

$$\frac{U^2}{2g} = 0,015 \text{ m.}$$

La suma de Bernoulli es pues, prescindiendo de α:

$$B = 1,10 + 0,015 = 1,115 \text{ m.}$$

Para calcular la profundidad en la sección de *1* m. de ancho, buscaremos primero la profundidad crítica en ella.

El gasto por unidad de ancho es:

$$q = \frac{1.20}{1,00} = 1,20 \text{ m}^2 : \text{s}$$

Según la tabla citada la profundidad crítica que le corresponde es $h_c = 0,528$ m. o redondeando, $h_c = 0,53$ m.

La suma de Bernoulli relativa vale, pues:

$$\frac{B}{h_c} = \frac{1,115}{0,53} = 2,11$$

a la que corresponden, según la **Tabla N.° 3,** dos valores de la profundidad relativa:

$$\frac{h'}{h_c} = 0,57 \qquad \frac{h''}{h_c} = 1,98$$

de donde $h' = 0,30$ m. y $h'' = 1,04$ m.

La primera de estas dos profundidades es de torrente y la segunda de río. Falta la condición para decidir cual de ellas hay que tomar efectivamente. Más adelante, al estudiar las corrientes abiertas, la discusión indica cual de estas dos es la profundidad aceptable; tomaremos la de río $h = 1,04$ m.

En un ejemplo anterior (pág. 88) se calculaba la profundidad y el coeficiente α de una sección, conocidas la profundidad y repartición de velocidades en otra. En general, puede prescindirse de α para el cálculo de la profundidad, como lo hemos hecho en este caso; siempre que no resulte ella muy cerca de la crisis, pues, entonces las variaciones de h son muy grandes con relación a las de la suma de Bernoulli. Tiene entonces α alguna influencia por cercano a la unidad que sea su valor.

Si atendemos a que para determinar las condiciones de energía mínima a gasto constante anulamos las derivadas de ambas funciones, nos damos cuenta que analíticamente esto equivale a determinar el *máximo gasto* correspondiente a una energía unitaria constante. En este orden de ideas, la velocidad crítica es la velocidad del gasto máximo:

$$U = \sqrt{g \frac{\Omega}{l}} \quad .$$

y el gasto máximo será:

$$Q_{máx} = \Omega \sqrt{g \frac{\Omega}{l}}$$

Si solamente nos referimos a secciones rectangulares: $\Omega = l\, h_c$, se tendrá: $Q_{máx} = l\, h_c \sqrt{g\, h_c}$, ecuación ya sentada para el gasto crítico. Como h_c en función de la suma de Bernoulli vale $h_c = 2/3\ B$, tendremos:

$$Q_{máx} = \frac{2}{3}\, l\, B \sqrt{\frac{2}{3}\, g\, B}$$

Luego, el gasto máximo por unidad de ancho en función de la carga, es:

$$q_{máx} = 0{,}385\ B \sqrt{2\, g\, B} \qquad (35$$

Si en la ecuación de la suma de Bernoulli para secciones rectangulares expresamos U en función de Q, como ya lo hicimos, se puede escribir:

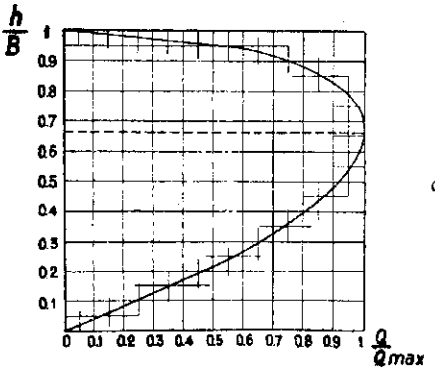


Fig. 24

$$B = h + \frac{Q^2}{2\, g\, l^2\, h^2}$$

Despejando aquí el gasto por unidad de ancho $\frac{Q}{l} = q$ tendremos:

$$q = h \sqrt{2\, g\, (B - h)} \qquad (36$$

Dividiendo la ecuación (*36*, por la (*35*, obtenemos:

$$\frac{q}{q_{max}} = \frac{h \sqrt{B - h}}{0{,}385\ B^{\frac{3}{2}}}$$

La altura h puede variar desde 0 a B. Llamando K a la razón h/B, podemos poner:

$$\frac{q}{q_{máx}} = \frac{K\,(1-K)^{\frac{1}{2}}}{0{,}385} = 2{,}6\,K\,(1-K)^{\frac{1}{2}} \qquad (37$$

Si damos a K valores comprendidos entre 0 y 1, se obtiene para la razón $q/q_{máx}$ los valores anotados en el cuadro siguiente:

K	0,00	0,05	0,10	0,15	0,20	0,20	0,40	0,50	0,60
$\frac{q}{q_{máx}}$	0,00	0,126	0,247	0,358	0,465	0,653	0,805	0,919	0,988

K	0,66	0,70	0,75	0,80	0,85	0,90	0,94	0,97	1,00
$\frac{q}{q_{máx}}$	1,00	0,999	0,975	0,926	0,855	0,738	0,598	0,426	0,000

En el gráfico de la *figura 24* está representada la variación del gasto con relación al gasto máximo en función de esta altura relativa $K = \frac{h}{B}$.

20. Potencia hidráulica.—Cuando se dispone de una suma de Bernoulli o energía por unidad de peso H, basta multiplicarla por el peso que en la unidad de tiempo escurre para obtener la potencia hidráulica que ella representa:

$$N = \gamma\, QH \cdot \text{Kgm/seg.}$$

Esta potencia se acostumbra a computar en caballos, que equivalen a 75 Kgm : seg., o en Kilowatts que valen 102 Kgm : seg.

$$N = \frac{\gamma\, Q\, H}{75}\,[HP] = \frac{\gamma\, Q\, H}{102}\,[KW] \qquad (38$$

Para calcular la potencia que se puede obtener en el árbol de un motor hidráulico, habremos de quitar las pérdidas que se producen en la transformación de la energía hidráulica en mecánica y las puramente mecánicas. Estas pérdidas determinan el rendimiento del motor hidráulico, llamando así a la relación entre la potencia hidráulica utilizable o que la máquina devuelve y la total que a ella se le suministra. El cálculo del rendimiento es propio del estudio de las máquinas. Supondremos aquí, para simplificar, que vale $0{,}75$, valor que introducido en la primera de las expresiones (*38*, da como expresión de la potencia útil:

$$N_u = \frac{\gamma\, Q\, H \times 0{,}75}{75} = 10\, Q\, H\ [HP] \qquad (39$$

Esta ecuación nos dice que la potencia que da una motriz hidráulica es *10* veces el producto del gasto en m³/seg. por la suma de Bernoulli disponible, en metros.

21. Pérdidas de carga.—Hasta ahora hemos tratado del líquido perfecto, al que es aplicable el teorema de Bernoulli. En la Naturaleza los líquidos son viscosos, es decir, en sus movimientos se generan resistencias, componentes tangenciales de las presiones, que tratan de retardar los deslizamientos, llamadas por analogía frotamientos. Además de estas fuerzas que absorben energía de la corriente, sucede que frecuentemente por efecto de la forma de la canalización se producen choques de las masas líquidas más veloces con otras menos veloces. Estos choques generan remolinos que absorben en cortos trechos partes a veces considerables de la energía que posee la corriente. En realidad, todas estas absorciones de la energía de la corriente son transformaciones de la energía hidráulica en calor, que no aparece de manera muy sensible. Si recordamos que el equivalente mecánico del calor es *427* Kgm. por caloría y se observa que este calor, a más de calentar el líquido, se trasmite a las paredes y se irradia al aire, resulta pequeñísima la elevación de temperatura del líquido. Calculemos, por ejemplo, la transformación en calor de *1* m. de suma de Bernoulli en una corriente cuyo gasto sea *1* m³ : seg., sin irradiación ni pérdidas de calor por las paredes.

El número de kilográmetros que en la unidad de tiempo se transforma, sería: $1\,000 \times 1 = 1\,000$ Kgms. o sea, se obtienen: $1\,000 : 427 = 2{,}34$ calorías que elevarían la temperatura de los *1 000* Kg. que pasan en un segundo, en: $2{,}34 : 1\,000 = 0{,}00234$ grados centígrados.

Sin conducción ni irradiación, la corriente seguiría desde ese punto con un aumento de *0,002* grados de temperatura que, como vemos, es inapreciable.

A esta transformación de energía se le llama en Hidráulica, *pérdida de carga* o *pérdida de Bernoulli*, denominación que corresponde al hecho de que la energía hidráulica transformada en otra no vuelve nuevamente a convertirse en suma de Bernoulli y por lo tanto, se ha perdido para la corriente.

En las corrientes naturales es evidente la pérdida de carga. En efecto, imaginemos un río de los de nuestro país, cuya cota piezométrica inicial sea de *3000* m sobre el nivel del mar, y la final, *cero*. Si suponemos nula la altura de velocidad inicial, la diferencia de $3000 - 0 = 3000$ m., debía corresponder, si se conservara la energía unitaria de la corriente, a la altura de velocidad final, y por lo tanto, debía escurrir con una velocidad final de $U = \sqrt{2\,g \times 3000} = 242$ m : seg., velocidad que es más de cien veces superior a la efectiva.

Se llama *pérdidas de carga singulares o locales* a las disipaciones de energía ocasionadas por agitaciones turbulentas de carácter local, que son fácilmente perceptibles, verificadas en cortas longitudes.

Además de estas pérdidas, hay que considerar la absorción de energía que se efectúa entre el líquido y la pared y las reacciones mutuas de las masas líquidas que acompañan a todo el escurrimiento, denominadas por esto, *pérdidas de carga continuas* o resistencia general. Esta clase de pérdidas de carga llamadas *frotamientos hidráulicos*, se subdividen en dos clases, esbozadas al enunciarlas: *frotamientos parietales*, o sea, acciones entre el líquido y la pared, que son los que más energía de

la corriente absorben; y *frotamientos interiores* (mucho más propiamente llamados frotamientos que los anteriores): acciones y reacciones de un filete con los que lo rodean, que se deben a la viscosidad del líquido, o la turbulencia, y a las diferencias de velocidad de los filetes.

Las pérdidas de carga singulares que se estudian en Hidráulica se pueden agrupar en tres tipos distintos: ensanchamientos bruscos, ensanchamientos menos bruscos denominados paulatinos, y cambios de dirección de la corriente.

Se demuestra, haciendo hipótesis sencillas, que las pérdidas de carga singulares, en una canalización dada, son proporcionales a la segunda potencia de la velocidad. Se acostumbra, por eso, medirlas en alturas de velocidad, y así se dice que en tal curva, en tal cono, se pierden tantas alturas de velocidad.

No quiere decir que efectivamente la velocidad de la corriente baje en lo que corresponde a la pérdida, sino únicamente que se *computa el Bernoulli perdido en alturas de velocidad*. Estas pérdidas singulares van acompañadas de torbellinos o remolinos, cuyo eje no se traslada y en cuya agitación se absorbe el Bernoulli. Estos torbellinos, que los autores franceses han llamado impropiamente *líquido muerto*, han sido llamados, como se dijo, en una nota, anteriormente, por Rehbock, rodillos («Walzen»).

Las pérdidas de carga continuas o frotamientos, las estudiaremos en el capítulo siguiente, al tratar de la ecuación general de las corrientes. Las pérdidas singulares serán estudiadas con los pocos medios que aun posee la Hidráulica, en cada caso especial, en las singularidades. Conviene, sin embargo, notar desde luego la forma que se da a la ecuación fundamental de la Hidráulica haciendo intervenir la energía disipada.

Si a la suma de Bernoulli de una sección de la corriente se agrega la energía perdida en el trayecto, se obtendrá la energía unitaria incial. Se acostumbra a llamar Λ a las pérdidas de carga. Según esto:

$$z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \alpha_1 \frac{U_1^2}{2g} + \Sigma \Lambda = z_o + \frac{p_o}{\gamma} + \alpha_o \frac{U_o^2}{2g}$$

Si las pérdidas son singulares se llama λ al *factor de resistencia* o número, que multiplicado por la altura de velocidad, da la pérdida de carga, y así, si todas son pérdidas singulares, se puede poner:

$$\Sigma \Lambda = \Sigma \lambda \frac{U^2}{2g}$$

Las pérdidas continuas o de frotamientos por unidad de longitud se llaman, J, y valdrán en un trayecto l

$$\int_o^l J \, ds$$

En una corriente habrá, en general, pérdidas de ambas clases, y se tendrá:

$$\Sigma \Delta = \Sigma \lambda \frac{U^2}{2g} + \int_o^l J\, ds$$

y por lo tanto, se puede escribir:

$$z + \frac{p}{\gamma} + \alpha \frac{U^2}{2g} + \Sigma \lambda \frac{U^2}{2g} + \int_o^l J\, ds = Cte.$$

Esta ecuación, que es de uso frecuente, es lo que algunos autores, como Spataro, han llamado *Teorema de Bernoulli generalizado*.

TABLA N.° 1

ALTURAS DE VELOCIDAD Y ALTURAS CRÍTICAS

OBSERVACIÓN.—La tabla puede usarse con los puntos o comas, notando que a la puntuación de partida corresponden los valores de todas las columnas en un reglón horizontal. Así por ejemplo a $H=0{,}02$ corresponden $\sqrt{2gH} = 0{,}626$ etc. y para $H=2$ valor que se halla en el mismo sitio $\sqrt{2gH} = 6.26$.

H	$\sqrt{2gH}$	$H\sqrt{gH}$	$H^2\sqrt{g\frac{H}{2}}$	$\frac{1}{H^2}$
0,01.	0,4.43	0,003.13	0,00002.21	1.0000,
0,01.05	0,4.54	0,003.37	0,00002.50	0.9100,
0,01.1	0,4.64	0,003.61	0,00002.81	0.8300,
0,01.15	0,4.75	0,003.86	0,00003.14	0.7600,
0,01.2	0,4.85	0,004.12	0,00003.49	0,6900,
0,01.25	0,4.95	0,004.37	0,00003.87	0.6400,
0,01.3	0,5.05	0,004.64	0,00004.27	0.5900,
0,01.4	0,5.24	0,005.19	0,00005.13	0.5100,
0,01.5	0,5.42	0,005.75	0,00006.10	0.4400,
0,01.6	0,5.60	0,006.34	0,00007.17	0.3900,
0,01.7	0,5.77	0,006.94	0,00008.34	0.3500,
0,01.8	0,5.94	0,007.56	0,00009.62	0.3100,
0,01.9	0,6.10	0,008.20	0,00011.01	0.2770,
0,02.	0,6.26	0,008.85	0,00012.52	0,2500,
0,02.1	0,6.42	0,009.53	0,00014.15	0.2270,
0,02.2	0,6.57	0,010.22	0,00015.89	0.2070,
0,02.3	0,6.71	0,010.92	0,00017.76	0.1890,
0,02.4	0,6.86	0,011.64	0,00019.75	0.1740,

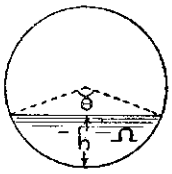
H	$\sqrt{2gH}$	$H\sqrt{gH}$	$H^2\sqrt{g\frac{H}{2}}$	$\frac{1}{H^2}$
0,02.5	0,7.00	0,012.37	0,00021.9	0.1600,
0,02.6	0,7.14	0,013.12	0,00024.1	0.1480,
0,02.7	0,7.27	0,013.89	0,00026.5	0.1370,
0,02.8	0,7.41	0,014.67	0,00029.0	0.1280,
0,02.9	0,7.54	0,015.46	0,00031.7	0.1190,
0,03.	0,7.67	0,016.27	0,00034.5	0.1110,
0,03.2	0,7.92	0,017.92	0,00040.5	0.0980,
0,03.4	0,8.16	0,019.63	0,00047.2	0.0870,
0,03.6	0,8.40	0,021.4	0,00034.4	0.0770,
0,03.8	0,9.63	0,023.2	0,00062.3	0.0690,
0,04.	0,8.85	0,025.0	0,00070.9	0.0620,
0,04.2	0,9.07	0,026.9	0,00080.0	0.0570,
0,04.4	0,9.29	0,028.9	0,00089.9	0.0520,
0,04.6	0,9.50	0,030.9	0,00100.5	0.0400,
0,04.8	0,9.70	0,032.9	0,00111.7	0.0430,
0,05.	0,9.90	0,035.0	0,00123.7	0.0400,
0,05.25	1,0.14	0,037.7	0,00139.8	0.0360,
0,05.5	1,0.38	0,040.4	0,00157.0	0.0350,
0,05.75	1,0.62	0,043.2	0,00175.5	0.0300,
0,06.	1,0.84	0,046.0	0,00195.2	0,0278,
0,06.25	1,1.07	0,048.9	0,00216.	0.0256,
0,06.5	1,1.29	0,051.9	0,00238.	0.0257,
0,06.75	1,1.50	0,054.9	0,00263.	0,0219,
0,07.	1,1.71	0,058.0	0,00287.	0.0204,
0,07.25	1,1.92	0,061.1	0,00313.	0.0190,
0,07.5	1,2.12	0,064.3	0,00341.	0.0178,
0,07.75	1,2.32	0,067.5	0,00370.	0.0166,
0,05.	1,2.52	0,070.8	0,00401.	0.0156,
0,08.5	1,2.91	0,077.6	0,00466.	0.0138,
0,09.	1,3.28	0,084.5	0,00538.	0.0123,
0,09.5	1,3.63	0,091.7	0,00616.	0.0111,
0,10.	1,4.00	0,099.0	0,00700.	0.0110,
0,10.5	1,4.35	0,106.5	0,00791.	0.0091,
0,11.	1,4.68	0,114.2	0,00888.	0.0083,
0,11.5	1,5.01	0,122.1	0,00993.	0.0076,
0,12.	1,5.54	0,130.1	0,01104.	0.0060,
0,12.5	1,5.65	0,138.3	0,01223.	0.0064,
0,13.	1,5.96	0,146.7	0,01349.	0.0059,
0,14.	1,6.57	0,164.0	0,01623.	0.0051,
0,15.	1,7.15	0,181.4	0,01929.	0.0044,

H	$\sqrt{2gH}$	$H\sqrt{gH}$	$H^2\sqrt{g\frac{H}{2}}$	$\frac{1}{H^2}$
0,16.	1,7.71	0,200.	0,02270.	0.0039,
0,17.	1,8.25	0,219.	0,02640.	0.0035,
0,18.	1,8.78	0,239.	0,03040.	0.0031,
0,19.	1,9.30	0,259.	0,03480.	0,0027,7
0,20.	1,9.80	0,280.	0,03960.	0,0025,0
0,21.	2,0.3	0,301.	0,04470.	0.0022,7
0,22.	2,0.8	0,323.	0,05030.	0.0020,7
0,23.	2,1.2	0,345.	0,05620.	0.0018,9
0,24.	2,1.7	0,368.	0,06250.	0.0017,4
0,25.	2,2.1	0,391.	0,06920.	0.0016,0
0,26.	2,2.6	0,415.	0,07630.	0.0014,8
0,27.	2,3.0	0,439.	0,08390.	0.0013,7
0,28.	2,3.4	0,464.	0,09180.	0.0012,8
0,29.	2,3.8	0,489.	0,10030.	0.0011,9
0,30.	2,4.2	0,514.	0,10910.	0.0011,1
0,32.	2,5.0	0,567.	0,12820.	0.0009,8
0,34.	2,5.8	0,621.	0,14920.	0.0008,7
0,36.	2,6.6	0,676.	0,17210.	0.0007,7
0,38.	2,7.3	0,733.	0,19700.	0.0006,9
0,40.	2,8.0	0,792.	0,22400.	0.0006,2
0,42.	2,8.7	0,852.	0,25300.	0.0005,7
0,44.	2,9.4	0,914.	0,28400.	0.0005,2
0,46.	3,0.0	0,977.	0,31800.	0.0004,7
0,48.	3,0.7	1,041.	0,35300.	0.0004,3
0,50.	3,1.3	1,107.	0,39100.	0.0004,0
0,52.5	3,2.1	1,191.	0,44200.	0.0003,6
0,55.	3,2.8	1,277.	0,49700.	0.0003,3
0,57.5	3,3.6	1,365.	0,55500.	0.0003,0
0,60.	3,4.3	1,455.	0,61700.	0.0002,78
0,62.5	3,5.0	1,547.	0,68400.	0.0002,56
0,65.	3,5.7	1,640.	0,75400.	0.0002,37
0,67.5	3,6.4	1,736.	0,82900.	0.0002,19
0,70.	3,7.0	1,833.	0,90700.	0.0002,04
0,72.5	3,7.7	1,933.	0,99100.	0.0001,90
0,75.	3,8.3	2,030.	1,07800.	0.0001,78
0,77.5	3,9.0	2,140.	1,17000.	0.0001,66
0,80.	3,9.6	2,240.	1,26700.	0.0001,56
0,85.	4,0.8	2,450.	1,47400.	0.0001,58
0,90.	4,2.0	2,670.	1,70100.	0.0001,23
0,95.	4,3.2	2,900.	1,94700.	0.0001,11
1,00.	4,4.3	3,130.	2,21000.	0.0001,00

TABLA N.° 2

ACUEDUCTOS CIRCULARES. ELEMENTOS PARA EL CÁLCULO DE LAS PROFUNDIDADES CRÍTICAS

$\frac{h}{r}$	$\frac{\Omega}{r^2}$	$\frac{l}{r}$	$\frac{\Omega}{lr}$
0.00	0.00	0.00	0.00
0.10	0.0578	0.872	0.0746
0.20	0.01635	1.20	0.136
0.30	0.2955	1.428	0.207
0.40	0.447	1.600	0.279
0.50	0.614	1.732	0.353
0.60	0.793	1.838	0.432
0.70	0.980	1.908	0.513
0.80	1.173	1.96	0.599
0.90	1.371	1.99	0.690
1.00	1.571	2.00	0.785
1.10	1.771	1.99	0.886
1.20	1.969	1.96	1.005
1.30	2,162	1.908	1.13
1.40	2.349	1.838	1.281
1.50	2.528	1.732	1.45
1.60	2.694	1.60	1.68
1.70	2.846	1.428	1.995
1.80	2.978	1.20	2.48
1.90	3.083	0.872	3.52
2.00	3.142	0.00	∞



$h = r\left(1 - \cos\frac{\theta}{2}\right)$

$\Omega = \frac{r^2}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta)$

$l = 2r \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}$

$\frac{\Omega}{l} = r\,\frac{\theta - \operatorname{sen}\theta}{4 \operatorname{sen}\frac{\theta}{2}}$

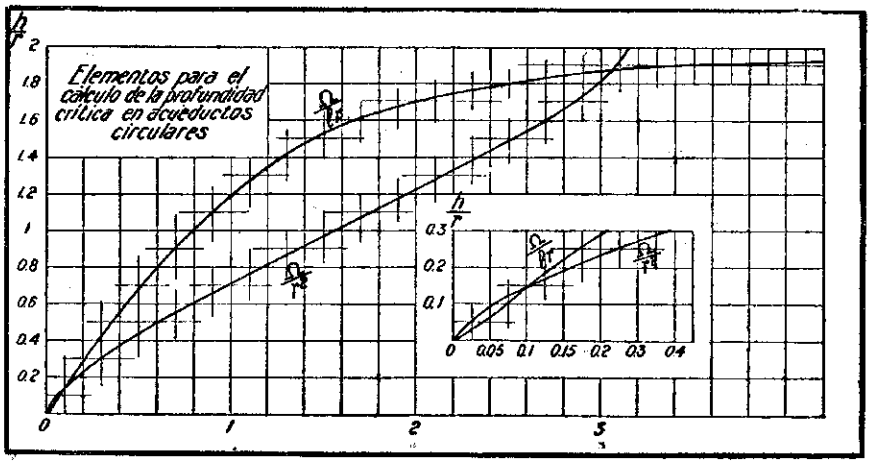


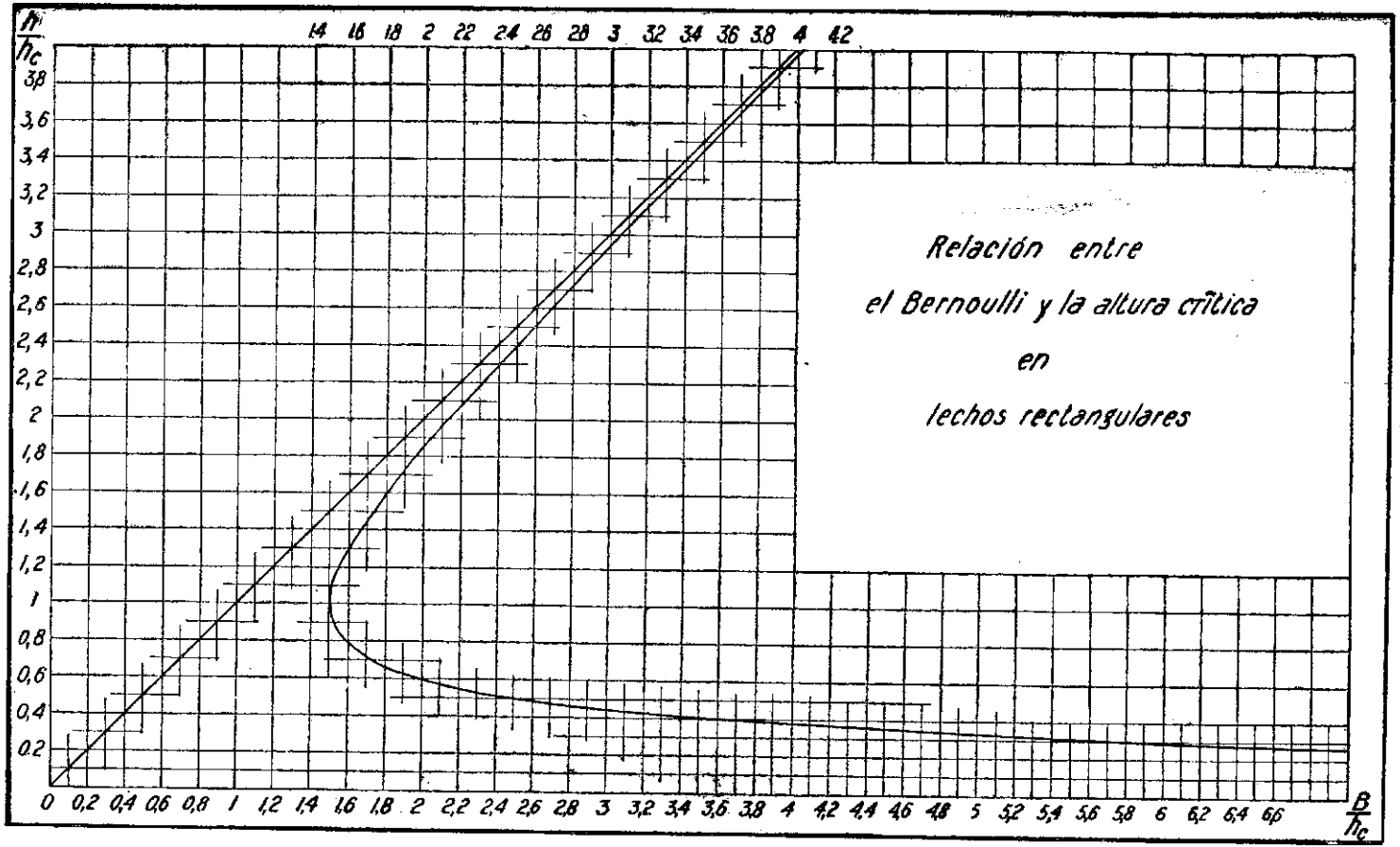
TABLA N.° 3

RELACIÓN ENTRE EL BERNOULLI Y LA ALTURA CON LA PROFUNDIDAD CRÍTICA EN LECHOS RECTANGULARES

$\frac{h}{h_c}$	$\frac{B}{h_c}$	$\frac{h}{h_c}$	$\frac{B}{h_c}$	$\frac{h}{h_c}$	$\frac{B}{h_c}$
0.25	8.25	0.60	1.98	1,90	2.03
0.26	7.65	0.65	1.84	2.00	2.12
0.27	7.13	0.70	1,72	2.10	2.22
0.28	6.90	0.75	1.65	2.20	2.31
0.30	5.95	0.80	1,585	2.30	2.405
0.32	5.20	0.85	1,545	2.40	2,50
0.34	4.80	0.90	1,515	2.50	2.59
0.36	4.30	0.95	1,502	2.60	2.685
0.38	4:00	1.00	1,500	2.70	2.78
0.40	3.53	1.10	1,512	2.80	2.87
0.42	3.24	1.20	1,550	3.00	3.055
0.44	3.00	1.30	1,592	3.20	3.25
0.46	2.83	1.40	1.65	3.40	3.446
0.48	2.66	1.50	1.73	3.60	3.64
0.50	2.50	1.60	1.80	3.80	3.835
0.52	2.32	1.70	1.87	4.00	4.03
0.55	2.20	1.80	1.95	4.20	4,18

Esta tabla va en gráfico a la vuelta.

(Continuará).


Relación entre
el Bernoulli y la altura crítica
en
lechos rectangulares
h/hc
B/hc