Ing. Gustavo Sinek L.

El cálculo de los pilares extremos en edificios y construcciones análogas de hormigón armado

(Conclusión)

V.—Momento de empotramiento del tramo de la viga continua en los pilares extremos. [Ecuación 2 de las «Normas»]

Supongamos que la ecuación de condición (13) se cumple. Sustituyendo sus valores en las ecuaciones (1) y (2) obtenemos:

$$(15) \quad \begin{cases} x_s = \dfrac{1}{h_s}\,\dfrac{I_s}{I} = k\,\dfrac{h_s\,l}{I} \\[2ex] x^{i} = \dfrac{1}{h_i}\,\dfrac{I_i}{I} = k\,\dfrac{h_i l}{I} \end{cases}$$

$$(16) \qquad M_3 = M_2 \frac{x_s + x_i}{1 + x_s + x_i} = M_2 \frac{k\dfrac{h_s l}{I} + k\dfrac{h_i\,l}{I}}{1 + k\dfrac{h_s l}{I} + k\dfrac{h_i l}{I}} = M_2 \frac{k\dfrac{h\,l}{I}}{1 + k\dfrac{h\,l}{I}}$$

Las «Normas» no dicen nada en cuanto a la situación del punto cero de momentos del tramo extremo de la viga cerca del primer pilar intermedio. La situación de este punto depende de la magnitud de M_B (véase fig. 1) y ésta depende a su vez de las longitudes de los tramos y de la naturaleza de la carga de la viga continua. Si el tramo extremo tuviese una articulación en el pilar extremo y estuviese empotrado completamente en el primer pilar intermedio, sería $M_B = -\dfrac{1}{8} q\,l^2$. En realidad M_B tendrá otra magnitud, podemos escribir, en general:

$$(17) \qquad M_B = -\frac{q\,l^2}{8} \cdot n$$

en que n es un número positivo cualquiera, siendo desconocido todavía su valor. Se puede considerar n como grado de empotramiento parcial.

Consideramos que existen articulaciones en los puntos de cero de momentos en los pilares según los fijan las «Normas». El sistema que tenemos que investigar (Fig. 9) tiene una sola magnitud hiperestática. Escogemos como tal la solicitación horizontal H.

Sistema dado — Caso principal — Condición H = — 1

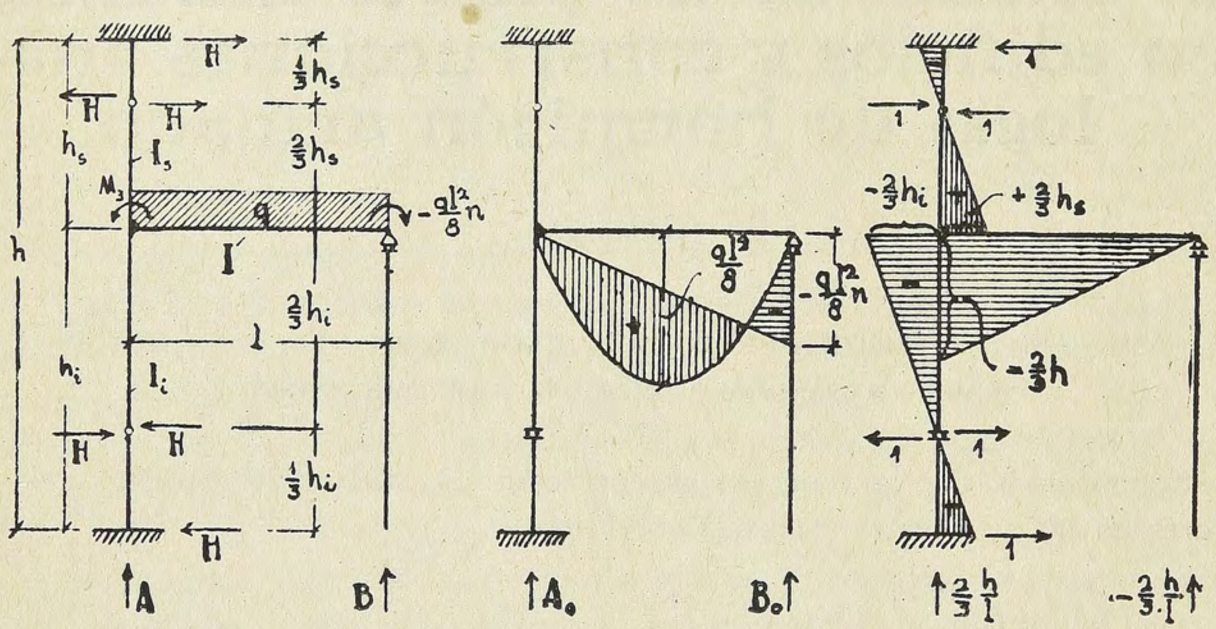

Fig. 9

Aplicando el método indicado en el capítulo II obtenemos:

$$
(18)\quad\left\{
\begin{aligned}
\int_0^s \frac{M_a M_b}{I}\,ds &= \frac{1}{I}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{q\,l^2}{8}-\frac{2}{3}\,h\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{l\,q^2}{8}-\frac{2}{3}\,h\right)\right]= \\
&= -\frac{q\,l^2}{12}\,\frac{hl}{I}\left[\frac{1}{3}\cdot\frac{12}{8}\,\frac{2}{3}-\frac{1}{6}n\cdot\frac{12}{8}\cdot\frac{2}{3}\right]=M_2\,\frac{h\,l}{I}\,\frac{2-n}{6} \\
\int_0^s \frac{M_a M_a}{I}\,ds &= \frac{1}{I_s}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}h_s\right)^3+\left(\frac{1}{3}h_s\right)^3\right]+\frac{1}{I_i}\cdot\frac{1}{3}\left[\left(\frac{2}{3}h_i\right)^3+\left(\frac{1}{3}h_i\right)^3\right]+ \\
&\quad+\frac{1}{I_i}\cdot\frac{1}{3}\,l\left(\frac{2}{3}\,h\right)^2= \\
&= \frac{h_s^3}{9\,I_s}+\frac{h_i^3}{9\,I_i}+\frac{4}{27}\,\frac{h^2\,l}{I}=\frac{1}{9}\,\frac{h_s}{k}+\frac{1}{9}\,\frac{h_i}{k}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{9}\,\frac{h^2\,l}{I}= \\
&= \frac{h}{9\,k}\left(1+\frac{4}{3}\,k\,\frac{h\,l}{I}\right)
\end{aligned}
\right.
$$

$$(19) \quad H = \frac{\int_o^s \frac{M_o M_a}{I} ds}{\int_o^s \frac{M_a M_a}{I} ds} = M_2 \frac{\frac{h l}{I} \cdot \frac{2-n}{6}}{\frac{h}{9k}\left(1+\frac{4}{3} k \frac{h l}{I}\right)} = M_2 \frac{\frac{3}{2}(2-n) k \frac{l}{I}}{1+\frac{4}{3} k \frac{l}{I}}$$

$$(20) \qquad M_3 = H \cdot \frac{2}{3} h = M_2 \frac{(2-n) k \frac{h l}{I}}{1+\frac{4}{3} k \frac{h l}{I}}$$

Este resultado debe concordar con el valor de M_3 de la ecuación (2) de las «Normas», o sea, con el de la ecuación (16); luego, se obtiene como ecuación de condición

$$M_2 \frac{(2-n) k \frac{h l}{I}}{1+\frac{4}{3} k \frac{h l}{I}} = M_2 \frac{k \frac{h l}{I}}{1+k \frac{h l}{I}}$$

o sea

$$(21) \qquad \frac{2-n}{1+\frac{4}{3} k \frac{h l}{I}} = \frac{1}{1+k \frac{h l}{I}}$$

de lo cual se obtiene

$$(22) \qquad k = \frac{I}{h l} \frac{1-n}{n-\frac{2}{3}}$$

La ecuación (2) de las «Normas» no puede ser exacta sino en el caso en que se verifique la condición (22).

Según la ecuación (13) debe ser *k* una magnitud positiva y finita. Esto puede suceder solamente cuando

$$(23) \qquad \frac{2}{3} < n < 1$$

o sea, considerando la ecuación (17), cuando

$$(23a) \qquad -\frac{q l^2}{12} < M_b < -\frac{q l^2}{8}$$

lo que expresado de otra manera:

(23b) $\left\{\begin{array}{l}\text{El punto de cero de los momentos del tramo extremo de la viga con-}\\ \text{tinua con un apoyo ficticio de rótula en el pilar extremo (línea 1 de la}\\ \text{fig. 1) debe distar de dicho pilar una magnitud que está comprendida}\\ \text{entre } \frac{3}{4}\,l \text{ y } \frac{5}{6}\,l.\end{array}\right.$

Si no se verifica la condición (23), o sea (23a) o bien (23b), la ecuación (2) de las «Normas» no tiene sentido alguno.

Ejemplo 5

Sea cumplida la condición (23a); del cálculo de la viga continua con articulación ficticia en el pilar extremo, resulte $M_B = -\frac{q\,l^2}{10}$; sea $l = 720$ cm.; las demás dimensiones sean iguales a las del ejemplo 4; sea, pues, $k = 0{,}444$.

Previamente tenemos que calcular I. De las ecuaciones (17) y (22) se obtiene:

$$n = -\frac{M_B}{\frac{q\,l^2}{8}} = -\frac{-\frac{q\,l^2}{10}}{\frac{q\,l^2}{8}} = \frac{4}{5}$$

$$I = k\,h\,l\,\frac{n - \frac{2}{3}}{1 - n} = 0{,}0444 \cdot 750 \cdot 720\,\frac{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}}{1 - \frac{4}{5}} = 24000 \cdot \frac{2}{3} = 16000 \text{ cm}^4 \ (*)$$

$$k\,\frac{h\,l}{I} = \frac{1 - n}{n - \frac{2}{3}} = \frac{1 - \frac{4}{5}}{\frac{4}{5} - \frac{2}{3}} = \frac{3}{2}$$

La ecuación (20) da

$$M_3 = M_2\,\frac{(2 - n)\,k\,\frac{h\,l}{I}}{1 + \frac{4}{3}\,k\,\frac{h\,l}{I}} = M_2\,\frac{\left(2 - \frac{4}{5}\right)\cdot\frac{3}{2}}{1 + \frac{4}{3}\cdot\frac{3}{2}} = -\frac{q\,l^2}{12}\cdot\frac{3}{5} = -\frac{q\,l^2}{20}$$

(*) Recuérdese las notas al pie de la pág. 79. El valor efectivo de I debe ser 30. 16000 cm⁴.

De las ecuaciones (1) y (2) de las «Normas» resulta

$$\left| \begin{array}{l} x_s = \dfrac{720}{300} \cdot \dfrac{4000}{16000} = 0{,}600 \\[2ex] x_i = \dfrac{720}{450} \cdot \dfrac{9000}{16000} = 0{,}900 \end{array} \right.$$

$$M_3 = M_2 \frac{x_s + x_i}{1 + x_s + x_i} = M_2 \frac{0{,}600 + 0{,}900}{1 + 0{,}600 + 0{,}900} = -\frac{q\,l^3}{12} \cdot \frac{3}{5} = -\frac{q\,l^2}{20}$$

Como era de prever, cumplida la relación (23a), los resultados que arrojan los dos procedimientos de cálculo son idénticos. El cálculo de las magnitudes M_s y M_i prosigue según el ejemplo 4.

VI.—Resumen y observaciones generales

Resumiendo los resultados de los capítulos III (o sea IV) y V llegamos al resultado final de nuestra investigación: Las condiciones de cálculo descritas por las «Normas» son exactas solamente en el caso en que se cumplan las condiciones

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{I_s}{h_s^2} = \dfrac{I_i}{h_i^2} = \dfrac{I}{h\,l} \quad \dfrac{1 - n}{n - \dfrac{2}{3}} = k \\[3ex] \dfrac{2}{3} < n < 1 \end{array} \right.$$

Si los momentos de inercia difieren mucho de estas condiciones, las prescripciones de las «Normas» arrojan resultados completamente falsos.

En el estudio precedente nos ateníamos estrictamente al sistema estático de las «Normas», y averiguábamos solamente, bajo qué condiciones valían las ecuaciones recomendadas por dicha publicación, sin preocuparnos hasta ahora del sistema estático de por sí.

Un marco de pisos con uniones rígidas en todos los nudos forma un sistema con tantas magnitudes hiperestáticas que es prácticamente imposible plantear y resolver las ecuaciones para determinar las incógnitas. Por esto, es indispensable hacer suposiciones simplificadoras. En la literatura técnica se han publicado varios de tales métodos o sistemas simplificando los cálculos; uno de ellos es el que aparece en las «Normas».

Según este sistema los pilares unidos con las vigas sobre el piso (p) —véase fig. 2— se consideran perfectamente empotrados en las vigas sobre los pisos (p — 1) y (p + 1), en otras palabras, la tangente a la elástica de los pilares queda vertical en los puntos a′ y c′ y está inclinada en el punto b′. Sin embargo, tratándose del piso (p — I), la tangente a la elástica en el punto b′ se vuelve vertical en el punto c″ y aquélla trazada en el punto c′ se inclina en el punto c″. Se establece. pues, una suposición en cierta etapa del cálculo que se anula en la siguiente.

De manera semejante se procede a la colocación de las articulaciones ficticias en los pilares. Para el cálculo del piso (p + 1) se supone una articulación en el punto A. Calculándose el piso (p) dicha articulación se desplaza hasta el punto A' y el pilar queda rígido en el punto A, etc.

Debe tenerse presente que este estudio considera la acción exclusiva de cargas verticales. Si tuviesen que considerarse aún fuerzas exteriores horizontales (fuerzas de viento o de terremoto), deberían cambiarse otra vez las suposiciones del cálculo, fijando nuevas posiciones para las articulaciones ficticias que fijan los puntos de cero del diagrama de momentos.

Tal procedimiento no puede satisfacer. Puede aceptarse que se hagan suposiciones simplificadoras; pero, una vez hechas, éstas deberán mantenerse a lo largo de todo el cálculo. El reproche no se dirige sólo al sistema de las «Normas» sino también a la mayoría de los sistemas publicados para la solución del problema de los cuadros rígidos múltiples.