Ing. Gustavo Sinek

Fórmulas exactas y simples y cuadros sinópticos para la determinación de la armadura resistente a las fuerzas tangenciales en piezas flexionadas de hormigón armado

En los cálculos de resistencia de piezas flexionadas de hormigón armado se determina en general con toda exactitud la armadura resistente a las fuerzas normales, y los calculistas suelen utilizar con todo derecho la resistencia a la tracción del fierro en cuanto a estas fuerzas se refiere hasta la tensión admisible. Por el contrario, no dan tal importancia al cálculo exacto de la armadura mínima resistente a las fuerzas tangenciales o esfuerzos de corte. El autor cree que eso proviene de una laguna en la literatura especial. Para la determinación de la armadura resistente a las fuerzas normales hay las conocidas fórmulas simples y cuadros sinópticos, pero faltan tablas que indiquen directamente, con un gasto mínimo de fierro, el diámetro, el número y las distancias de las barras dobladas a 45° y de los estribos.

El complemento correspondiente de la literatura es el objeto del presente trabajo. En esta oportunidad se rectificarán también algunos errores que se repiten en casi toda la literatura.

I. LA FUERZA TANGENCIAL TOTAL

SIGNOS Y DEFINICIONES

T_x Fuerza tangencial total o área del diagrama de esfuerzos de corte desde el apoyo izquierdo hasta el punto de abscisa x.

M_x Momento de flexión en el punto de abscisa x.

Q_x Fuerza transversal o esfuerzo de corte en el punto de abscisa x.

τ_x Tensión o fatiga tangencial en el punto de abscisa x.

ξ Distancia desde el apoyo izquierdo hasta el lugar de momento máximo de flexión.

T Fuerza tangencial total o área del diagrama de esfuerzos de corte desde el apoyo izquierdo hasta el punto ξ.

M Momento máximo de flexión.

Q Esfuerzo de corte máximo.

z Distancia entre los centros de compresión y tracción en la pieza flexionada (brazo de palanca del par interno).

a_o Ancho del nervio en piezas flexionadas de sección T.

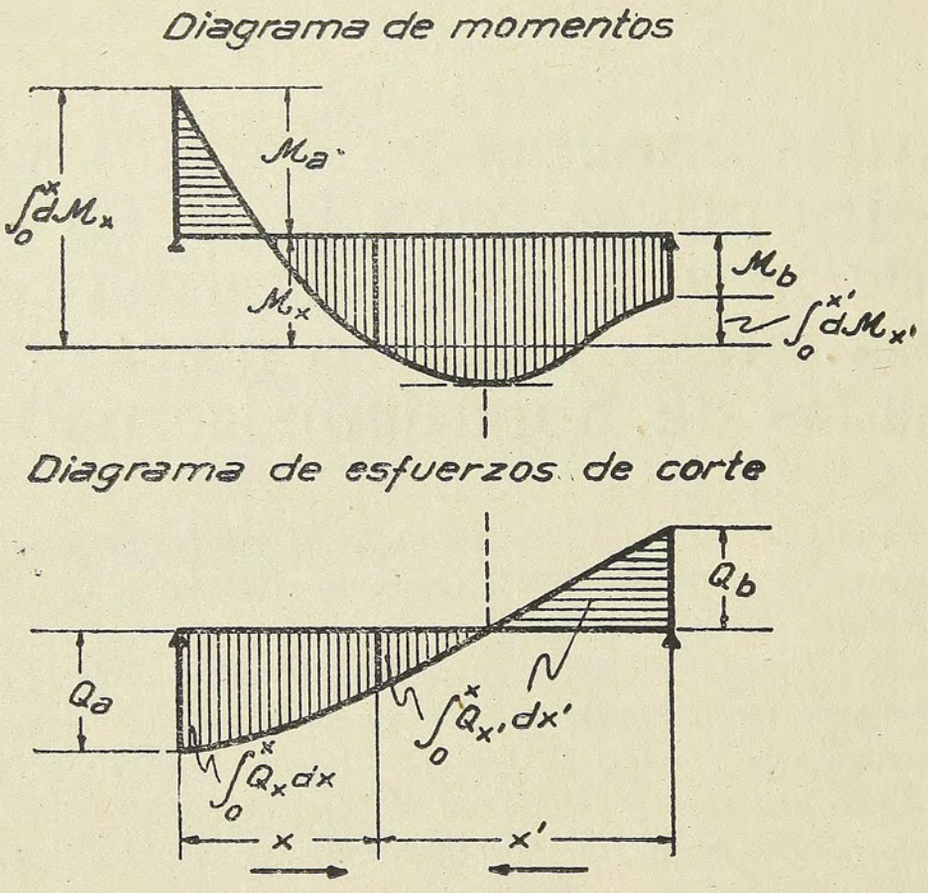


FIG. 1

Según las ecuaciones siguientes se puede determinar la magnitud T_x por dos métodos:

$$(1) \quad T_x = a_o \int_o^x \tau_x \, dx = a_o \int_o^x \frac{Q_x}{a_o z} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{z} \displaystyle\int_o^x Q_x \, dx \ldots \text{1.}^{\text{er}} \text{ método} \\ \dfrac{1}{z} \displaystyle\int_o^x dM_x \ldots \text{2.}^{\circ} \text{ método} \end{cases}$$

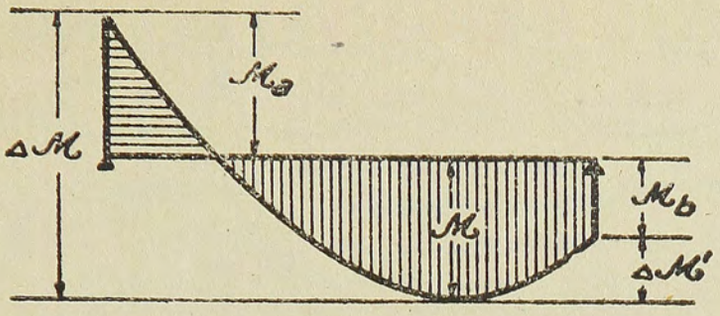
El significado de la integrales se indica en la figura 1.

La fuerza tangencial total en el lado considerado del tramo que debe recogerse con armaduras adecuadas es por lo tanto

$$(2) \quad T = \begin{cases} \dfrac{1}{z} \displaystyle\int_o^\xi Q_x \, dx \ldots \text{1.}^{\text{er}} \text{ método} \\ \dfrac{1}{z} \displaystyle\int_o^\xi dM_x \ldots \text{2.}^{\circ} \text{ método} \end{cases}$$

A. Carga repartida uniformemente

Línea de momentos



Línea de esfuerzos de corte

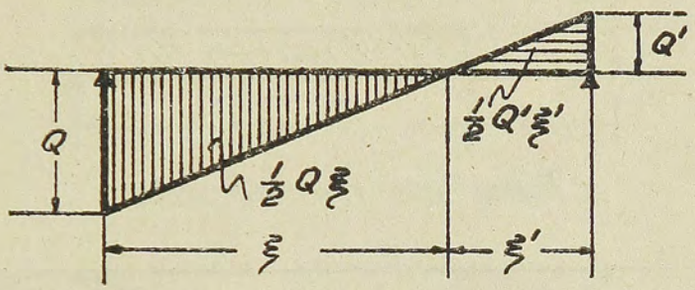
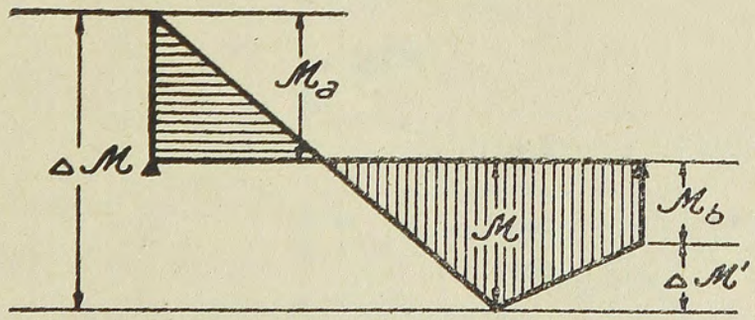


FIG. 2

$$\text{(I)} \qquad \underbrace{T = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\,\dfrac{Q\xi}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{z}\,\Delta M \end{cases},}_{\text{lado izquierdo}} \qquad \underbrace{T' = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\,\dfrac{Q'\xi'}{2} & \ldots\ (1.^{\text{er}}\ \text{método}) \\[2ex] \dfrac{1}{z}\,\Delta M' & \ldots\ (2.^{\circ}\ \text{método}) \end{cases}}_{\text{lado derecho}}$$

B. Carga concentrada

Línea de momentos



Línea de esfuerzos de corte

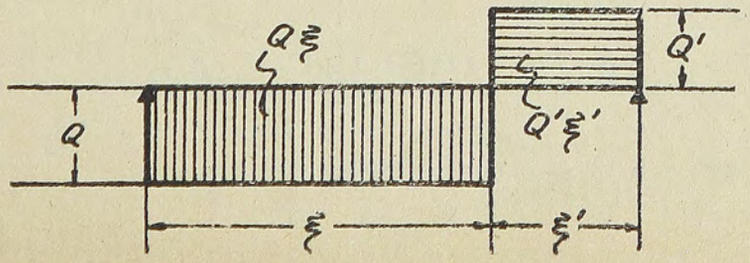


FIG. 3

$$(\mathrm{I}^{a})\quad T = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\, Q\xi \\[2ex] \dfrac{1}{z}\, \Delta M \end{cases} , \qquad T' = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\, Q'\xi' & \ldots\ (1.^{er}\ \text{método}) \\[2ex] \dfrac{1}{z}\, \Delta M' & \ldots\ (2.^{o}\ \text{método}) \end{cases}$$

lado izquierdo — lado derecho

Ejemplo 1:

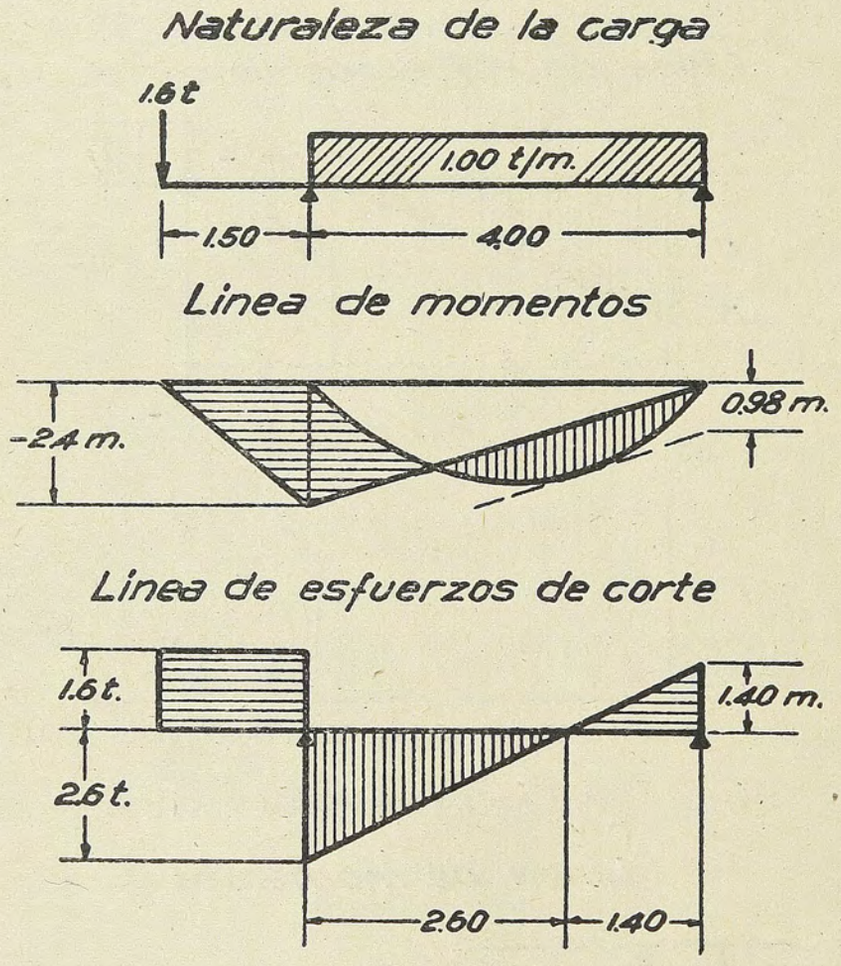


FIG. 4

$$M_a = -1{,}60.\ 1{,}50 = -2{,}40 \text{ mt.}$$

$$Q = \frac{1{,}00.\ 4{,}00}{2} + \frac{2{,}40}{4{,}00} = 2{,}60 \text{ t}$$

$$Q' = \frac{1{,}00.\ 4{,}00}{2} - \frac{2{,}40}{4{,}00} = 1{,}40 \text{ t}$$

$$\xi' = \frac{1.40}{1{,}00} = 1{,}40 \text{ m.}\ ;\ \xi = 4{,}00 - 1{,}40 = 2{,}60 \text{ m.}$$

$$M = 1{,}40.\ 1{,}40 - 1{,}00\ \frac{1{,}40^2}{2} = 0{,}98 \text{ mt.}$$

Entre los apoyos:

$$T = \begin{cases} \dfrac{1}{z} \cdot \dfrac{2{,}60 \cdot 2{,}60}{2} = \dfrac{3{,}38}{z} \\[2ex] \dfrac{1}{z}\,(2{,}40 + 0{,}98) = \dfrac{3{,}38}{z} \end{cases} \qquad T' = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\,\dfrac{1{,}40 \cdot 1{,}40}{2} = \dfrac{0{,}98}{z} \;\ldots\; (1.^{er}\ \text{método}) \\[2ex] \dfrac{1}{z} \cdot 0{,}98 = \dfrac{0{,}98}{z} \;\ldots\; (2.^{o}\ \text{método}) \end{cases}$$

Para la consola:

$$T = \begin{cases} \dfrac{1}{z}\,1{,}60 \cdot 1{,}50 = \dfrac{2{,}40}{z} & \ldots\ (1.^{er}\ \text{método}) \\[2ex] \dfrac{1}{z}\,2{,}40 = \dfrac{2{,}40}{z} & \ldots\ (2.^{o}\ \text{método}) \end{cases}$$

II. ABSORCION DE LAS FUERZAS TANGENCIALES POR ESTRIBOS Y BARRAS INCLINADAS A 45°

Signos y definiciones:

T_e Parte de la fuerza tangencial total o área del diagrama de esfuerzos de corte recogida por todos los estribos normales al eje de la pieza flexionada en el segmento considerado s.

T_i Parte de la fuerza tangencial total recogida por todas las barras inclinadas a 45° con el eje de la pieza flexionada en el segmento considerado s

S_e Sección transversal de un estribo (estribo simple $= 2 \cdot \dfrac{\pi \phi^2}{4}$)

e Distancia de los estribos entre sí.

n Número de todos los estribos colocados en el segmento considerado s, $\left(n = \dfrac{s}{e}\right)$

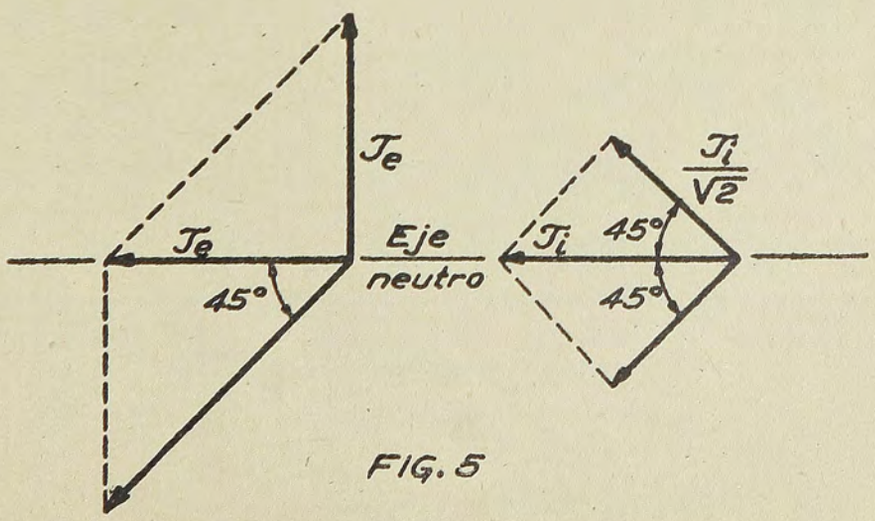


FIG. 5

Estribos Barras inclinadas

La figura 5 muestra a la izquierda la forma conocida de cómo trabajan los estribos; del mismo modo a la derecha las barras inclinadas. En el eje neutro actúa la fuerza tangencial horizontal; las componentes dirigidas hacia abajo se recogen, como fuerzas de compresión, por el hormigón, de modo que restan para los estribos T_e y para las barras inclinadas la componente $\frac{T_i}{\sqrt{2}}$.

En la figura 5 están dibujadas las fuerzas T_e y T_i de la misma longitud, y se ve que la fuerza que deben recoger los estribos es mayor que la que deben recoger las barras inclinadas. Esto ha causado un error en varios tratados. Algunos autores afirman que es más económico añadir barras inclinadas en vez de estribos. Pero olvidan que aquéllas tienen que ser más largas que éstos, y, en realidad, el gasto de fierro es el mismo en ambos casos. La solución mejor, también respecto a la economía, es la que prescriben las «Normas», a saber, «deben utilizarse de preferencia las barras oblicuas que resultan al doblar las barras de tracción a medida que ya no se requieran para resistir a los momentos solicitantes».

Debe ser:

$$(3) \quad \begin{cases} T_e = n\, S_e\, \sigma_f = s\, \dfrac{S_e\, \sigma_f}{e} \\ T_i = S_i\, \sigma_f \sqrt{2} \end{cases}$$

Los cuadros sinópticos 1 y 2 indican para $\sigma_f = 1200$ kg./cm.^{2}.

1.° Las magnitudes $S_i\, \sigma_f \sqrt{2}$ para diámetros diferentes de fierro redondo y para números diferentes i de barras inclinadas a 45°,

2.° Las magnitudes $\frac{S_e\, \sigma_f}{e}$ para diámetros diferentes de fierro redondo y para distancias diferentes e de estribos, pero iguales entre sí.

$T_i = S_i \sigma_f \sqrt{2}$ en *t* para i barras inclinadas a 45° y para $\sigma_f = 1200$ kg/cm²

ϕ \ i	mm	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
"1/4	6,35	0,54	1,08	1,61	2,15	2,69	3,23	3,77	4,30	4,84	5,38
5/16	7,94	0,84	1,68	2,52	3,36	4,20	5,04	5,88	6,72	7,56	8,40
3/8	9,53	1,21	2,42	3,63	4,84	6,05	7,26	8,47	9,68	10,89	12,10
7/16	11,11	1,64	3,29	4,93	6,58	8,22	9,86	11,51	13,15	14,80	16,44
1/2	12,70	2,15	4,30	6,45	8,60	10,75	12,90	15,05	17,20	19,35	21,50
5/8	15,88	3,36	6,72	10.08	13,44	16,81	20,17	23,53	26,89	30,25	33,61
3/4	19,05	4,84	9,67	14,51	19,34	24,18	29,02	33,85	38,69	43,52	48,36
7/8	22,23	6,59	13,17	19,76	26,34	32,95	39,51	46,10	52,68	59,27	65,85
1	25,40	8,60	17,20	25,79	34,39	42,99	51,59	60,19	68,78	77,38	85,98
1 1/8	28,58	10,89	21,77	32,66	43,54	54,43	65.31	76'20	87,08	97,97	108,9
1 1/4	31,75	13,43	26,87	40,20	53,64	67,07	80,50	93,94	107,4	120,8	134,2

$\frac{S_e \sigma_f}{e}$ en *t/m* para estribos de dos secciones y para $\sigma_f = 1200$ kg/cm².

φ'' \ e(m)	0,15	0,16	0,17	0,18	0,19	0,20	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25
1/4	5,06	4,75	4,47	4,22	4,00	3,80	3,62	3,45	3,30	3,17	3,04
5/16	7,92	7,43	6,99	6,60	6,25	5,94	5,66	5,40	5,17	4,95	4,75
3/8	11,40	10,69	10,06	9,50	9,00	8,55	8,14	7,77	7,43	7,13	6,84
7/16	15,51	14,54	13,69	12,93	12,25	11,63	11.08	10,58	10,12	9,70	9,31
1/2	20,3	19,01	17,89	16,89	16,01	15,20	14,48	13,82	13,22	12,67	12,16
5/8	31,7	29,7	28,0	26,4	25,0	23,8	22,6	21,6	20,7	19,81	19,01

Cuadros sinópticos N.o 1 y 2

A continuación se indica el modo de calcular, evitando cualquier gasto excesivo de fierro.

A. Carga repartida uniformemente

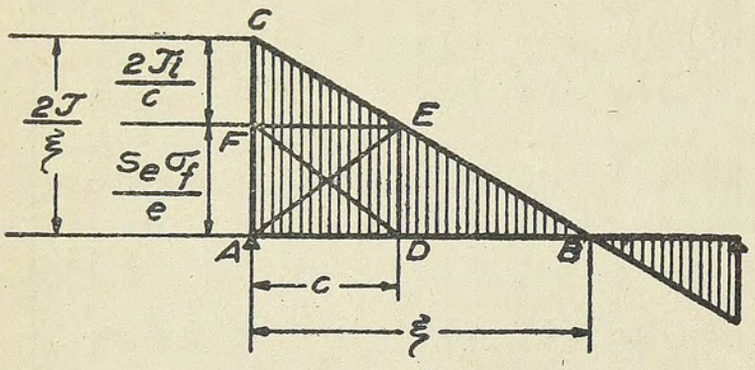


FIG. 6

En la figura 6 representan: El triángulo $\overline{ABC}$ la fuerza T; el triángulo $\overline{FEC}$ la fuerza T_i; el rectángulo cruzado $\overline{ADEF}$ la fuerza recogida por los estribos en el segmento c. (¡En toda la literatura conocida del autor se prescinde del triángulo $\overline{DBE}$!).

a) Dado T, ξ; fijado T_i; se pide $\frac{S_e \sigma_f}{e}$.

(II) $c = \xi \sqrt{\frac{T_i}{T}}$ (según figura 6)

Area ADFE $= 2 \left(T \frac{c}{\xi} - T_i\right)$ (según figura 6)

Area ADFE $= c \frac{S_e \sigma_f}{e}$ (según la primera ecuación 3)

(III) $\frac{S_e \sigma_f}{e} = \frac{2}{c} \left(T \frac{c}{\xi} - T_i\right)$

Ejemplo 2:

Dado: z = 0,50 m; Q = 12,0 t; ξ = 3,60 m.

$T = \frac{1}{0{,}50} \frac{12{,}0 \cdot 3{,}60}{2} = 43{,}20$ t (según ecuación I)

Debieran doblarse 4 ϕ 7/8" con $T_i = 26{,}34$ t (según cuadro 1)

$c = 3{,}60 \sqrt{\frac{26{,}34}{43{,}20}} = 2{,}81$ m (según ecuación II)

$\frac{S_e \sigma_f}{e} = \frac{2}{2{,}81} \left(43{,}20 \frac{2{,}81}{3{,}60} - 26{,}34\right) = 5{,}27$ t/m (según ecuación III)

Se colocan estribos ϕ $^5/_{16}''$ a 0,22 con

$$\frac{S_e \sigma_f}{e} = 5{,}40 \text{ t/m} \qquad \text{(según cuadro 2)}$$

B.) Dado T, ξ: fijado $\frac{S_e \sigma_f}{e}$; se pide T_i.

(Véase figura 6).

$$\text{(IV)} \quad c = \xi \frac{\frac{2T}{\xi} - \frac{S_e \sigma_f}{e}}{\frac{2T}{\xi}} = \xi - \frac{S_e \sigma_f}{e} \cdot \frac{\xi^2}{2T} \qquad \text{(según figura 6)}$$

$$\text{(V)} \quad T_i = \left(\frac{2T}{\xi} - \frac{S_e \sigma_f}{e}\right) \frac{c}{2} = c\left(\frac{T}{\xi} - \frac{1}{2} \cdot \frac{S_e \sigma_f}{e}\right) \qquad \text{(según figura 6)}$$

Ejemplo 3:

Dado: z = 0,50 m.: ΔM = 21,60 mt. ξ = 3,60 m.

$$T = \frac{21{,}60}{0{,}50} = 43{,}20 \text{ mt.} \qquad \text{(según ecuación I)}$$

Debieran colocarse estribos ϕ 5/16" a 0,22 m.

$$\text{con} \quad \frac{S_e \sigma_f}{e} = 5{,}40 \text{ t/m} \qquad \text{(según cuadro 2)}$$

$$c = 3{,}60 - 5{,}40 \frac{3{,}60^2}{2.43{,}20} = 2{,}79 \text{ m} \qquad \text{(según ecuación IV)}$$

$$T_i = 2{,}79 \left(\frac{43{,}20}{3{,}60} - \frac{1}{2} 5{,}40\right) = 25{,}95 \text{ t} \qquad \text{(según ecuación V)}$$

Se doblan 4 ϕ 7/8" con T_i = 26,34 t (según cuadro 1)

B. Carga concentrada

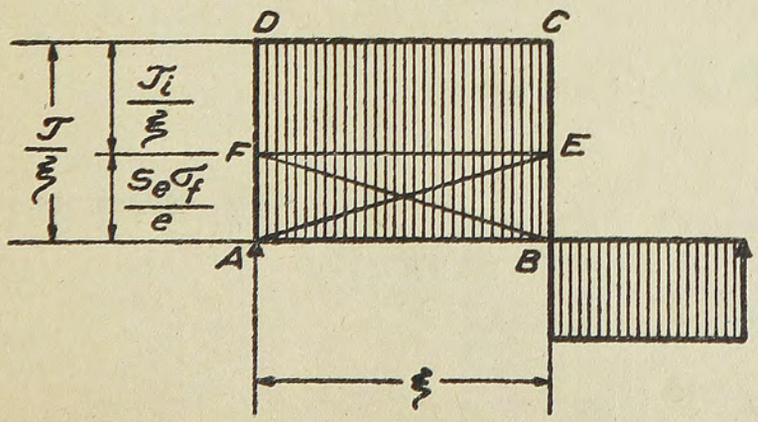


FIG. 7

En la figura 7 representan: El rectángulo $\overline{ABCD}$ la fuerza T; el rectángulo $\overline{FECD}$ la fuerza T_i; el rectángulo cruzado $\overline{ABEF}$ la fuerza T_e.

a) Dado T, ξ; fijado T_i; se pide $\frac{S_e \sigma_f}{e}$

Area ABEF = $T - T_i$ (según figura 7)

Area ABEF = $\xi \frac{S_e \sigma_f}{e}$ (según la primera ecuación 3)

(III^a) $$\frac{S_e \sigma_f}{e} = \frac{T - T_i}{\xi}$$

Ejemplo 4:

Dado: z = 0,60 m; Q = 8,00 t; ξ = 2,40 m

$$T = \frac{1}{0,60} 8,00 . 2,40 = 32,00 \text{ t}$$ (según ecuación I^a)

Debieran doblarse 4 ϕ 3/4" con T_i = 19,34 t (según cuadro 1)

$$\frac{S_e \sigma_f}{e} = \frac{32,00 - 19,34}{2,40} = 5,27 \text{ t/m}$$ (según ecuación III^a)

Se colocan estribos ϕ 5/16" a 0,22 m con

$$\frac{S_e \sigma_f}{e} = 5,40 \text{ t/m}$$ (según cuadro 2)

B.) Dado T, ξ; fijado $\frac{S_e \sigma_f}{e}$; se pide T_i.

(Véase figura 7).

(V^a) $$T_i = T - T_e = T - \frac{S_e \sigma_f}{e} \xi$$ (según figura 7)

Ejemplo 5:

Dado: z = 0,60 m; Δ M = 19,20 mt.; ξ = 2,40 m.

$$T = \frac{19,20}{0,60} = 32,00 \text{ t}$$ (según ecuaciones I^a)

Debieran colocarse estribos ϕ 5/16" con

$$\frac{S_e \sigma_f}{e} = 5,40 \text{ t/m}$$ (según cuadro 2)

$T_i = 32{,}00 - 5{,}40 \cdot 2{,}40 = 19{,}04$ t (según ecuación V)
Se doblan $4 \phi 3/4''$ con $T_i = 19\,34$ t (según cuadro 1)

III. DETERMINACION DE LAS DISTANCIAS ENTRE BARRAS DOBLADAS

Las «Normas» indican en la página 45 las directivas para determinar las distancias de las barras dobladas. En la literatura se ha elaborado un método gráfico correspondiente. Prescindiendo de que éste es bastante complicado, la construcción gráfica necesaria enmaraña los planos de fierros que tienen que servir para los enfierradores. A continuación se indica un método aritmético muy simple con cuadros sinópticos.

A. Carga repartida uniformemente

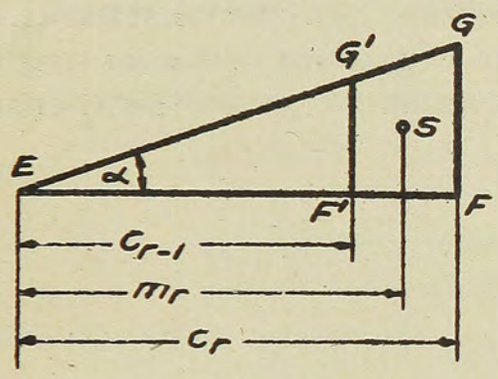


FIG. 8

En la figura 8, el triángulo $\overline{EFG}$ representa la fuerza tangencial que recogen r barras dobladas y el triángulo $\overline{EF'G'}$ aquélla que recogen (r — 1) barras.

El problema geométrico es el siguiente; El triángulo rectángulo $\overline{EFG}$ debe dividirse por la línea recta F' G' en dos partes, de modo que el área del triángulo rectángulo $\overline{EF'G'}$ guarde cierta proporción con el área del triángulo $\overline{EFG}$; además debe determinarse la distancia m_r del centro de gravedad S del trapecio $\overline{FF'GG'}$.

Si

(4) $$p_r = \frac{\overline{EF'G'}}{\overline{EFG}}$$ es el factor de proporcionalidad, se obtiene

(VI) $$c_{r-1} = c_r \sqrt{p_r}$$

Además:

$$m_r = c_{r-1} + \frac{c_r - c_{r-1}}{3} \cdot \frac{\overline{F'G'} + 2 \cdot \overline{FG}}{\overline{F'G'} + \overline{FG}} =$$

$$= c_{r-1} + \frac{c_r - c_{r-1}}{3} \cdot \frac{c_{r-1} \cdot \operatorname{tg} \alpha + 2\, c_r \cdot \operatorname{tg} \alpha}{c_{r-1} \cdot \operatorname{tg} \alpha + c_r \operatorname{tg} \alpha} =$$

$$= \left[\sqrt{p_r} + \frac{1 - \sqrt{p_r}}{3} \cdot \frac{\sqrt{p_r} + 2}{\sqrt{p_r} + 1} \right] c_r ,$$

o reducido,

$$\text{(VII)} \qquad m_r = \frac{2}{3} \, \frac{1 + \sqrt{p_r} + p_r}{1 + \sqrt{p_r}} \, c_r$$

La ecuación VII demuestra que la distancia m_r del centro de gravedad del trapecio es independiente del ángulo α.

La interpretación estática de esto es de que las distancias de las barras dobladas son independientes de la magnitud de la fuerza tangencial T_i. Estas distancias dependen solamente del segmento c_r y de las proporciones en las cuales están las secciones transversales de las barras que se doblan en las diversas secciones de la pieza flexionada. Por eso no es preciso dibujar el diagrama de fuerzas tangenciales como las «Normas alemanas» lo exigen especialmente y como las «Normas chilenas» lo recomiendan.

Ejemplo 6:

Deben doblarse:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1\,\phi\, 3/4'' = 2{,}85 \text{ cm}^2 \\ 1\,\phi\, 7/8'' = 3{,}88 \quad » \end{array}\right\} = 6{,}73 \text{ cm}^2 \\ 1\,\phi \quad 1'' = 5{,}07 \quad » \end{array}\right\} = 11{,}80 \text{ cm}^2$$

Aplicando las ecuaciones 5, VI, VII, resulta:

$$p_3 = \frac{6{,}73}{11{,}80} = 0{,}571 \; ; \sqrt{p_3} = 0{,}756$$

$$p_2 = \frac{2{,}85}{6{,}73} = 0{,}423 \; ; \; \sqrt{p_2} = 0{,}650$$

$$c_3 = c$$

$$c_2 = c_2 \sqrt{p_3} = 0{,}756 \, c$$

$$c_1 = c_2 \sqrt{p_2} = 0{,}756 \cdot 0{,}650\, c = 0{,}491\, c$$

$$m_3 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + 0{,}756 + 0{,}571}{1 + 0{,}756}\, c = 0{,}883\, c$$

$$m_2 = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 + 0{,}650 + 0{,}423}{1 + 0{,}650} \cdot 0{,}756\, c = 0{,}633\, c$$

$$m_1 = \frac{2}{3} \cdot 0{,}491\, c = 0{,}327\, c$$

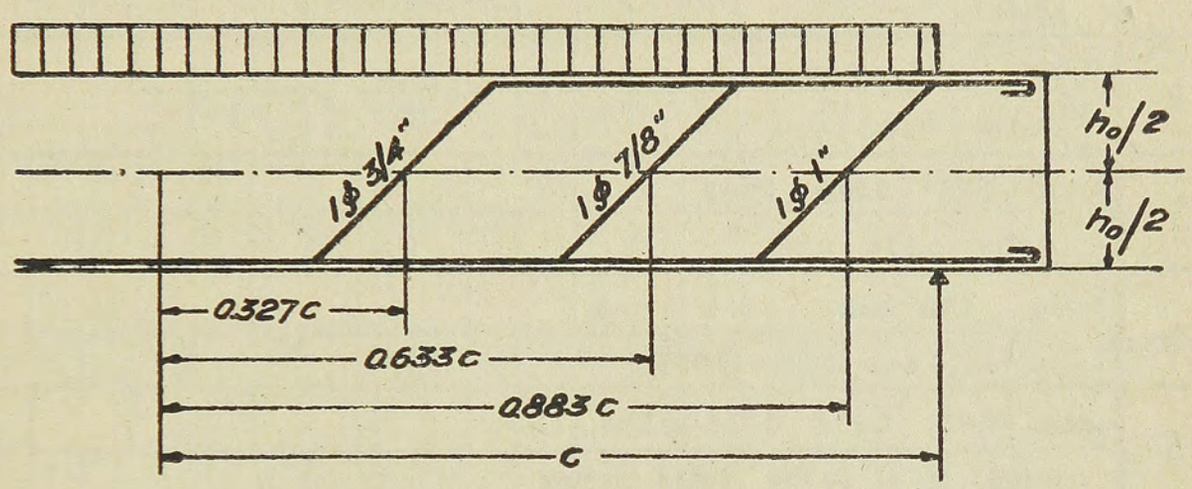
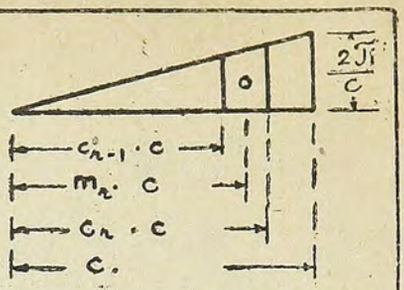


FIG. 9

(A primera vista este càlculo parece un poco largo. Pero puede hacerse la prueba de solucionar este ejemplo por construcción gráfica).

En el cuadro sinóptico N.º 3 pueden leerse directamente las distancias m_r de las barras dobladas en el caso más frecuente de barras dobladas con diámetros iguales. El cuadro indica también las distancias c_r de las líneas que separan los trapecios particulares. Si se doblaran barras con diámetros iguales, no se necesitarían las magnitudes c_r del cuadro. En caso que ellos fueran diferentes, puede servirse de las magnitudes c_r a fin de interpolar.

DISTANCIAS DE n BARRAS DOBLADAS DE IGUALES SECCIONES TRANSVERSALES PARA UNA CARGA REPARTIDA UNIFORMEMENTE.



n	θ	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	c_8	c_9	c_{10}
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	
1	0.000	1.000									
	0.667										
2	0.000	0.707	1.000								
	0.471	0.862									
3	0.000	0.577	0.816	1.000							
	0.385	0.704	0.912								
4	0.000	0.500	0.707	0.866	1.000						
	0.333	0.609	0.790	0.935							
5	0.000	0.477	0.632	0.774	0.894	1.000					
	0.298	0.545	0.706	0.836	0.948						
6	0.000	0.408	0.577	0.707	0.816	0.913	1.000				
	0.272	0.497	0.644	0.762	0.866	0.957					
7.	0.000	0.378	0.534	0.654	0.755	0.845	0.926	1.000			
	0.252	0.461	0.597	0.706	0.801	0.886	0.963				
8.	0.000	0.354	0.500	0.612	0.707	0.791	0.866	0.935	1.000		
	0.236	0.431	0.558	0.661	0.750	0.829	0.901	0.968			
9	0.000	0.333	0.471	0.577	0.666	0.745	0.816	0.882	0.943	1.000	
	0.222	0.406	0.526	0.622	0.706	0.781	0.850	0.913	0.972		
10	0.000	0.316	0.447	0.547	0.632	0.707	0.774	0.836	0.894	0.948	1.000.
	0.211	0.385	0.499	0.591	0.670	0.741	0.805	0.865	0.921	0.974	(

Ejemplo 7:

Deben doblarse 3 barras con diámetros iguales.
Se puede leer del cuadro 3:-

$m_1 = 0{,}385\ c,$
$m_2 = 0{,}704\ c,$
$m_3 = 0{,}912\ c.$

Ejemplo 8:

Deben doblarse 5 barras con diámetros iguales, pero muy cerca del apoyo deben doblarse 2 barras en la misma sección transversal de la pieza flexionada.

Este caso sucede frecuentemente, cuando deben utilizarse aún las dos barras dobladas cerca del apoyo para cubrir con ellas los momentos negativos en el apoyo de una viga continua o en el ángulo de un marco rígido.

Del cuadro 3 se puede deducir directamente:

$m_1 = 0{,}298\ c,$

$m_2 = 0{,}545\ c,$

$m_3 = 0{,}706\ c,$

y de la ecuación VII resulta:

$$m_{4+5} = \frac{2}{3}\ \frac{1+\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{3}{5}}{1+\sqrt{\frac{3}{5}}}\ c = 0{,}892\ c.$$

También puede sacarse del cuadro 3 con exactitud suficiente la última magnitud con $c_4 = 0{,}894\ c$.

B. Carga concentrada

En vez de los triángulos de la figura 8 en el caso de una carga repartida uniformemente, se tiene en este caso rectángulos. Las ecuaciones correspondientes se escriben:

(VI *a*) $\xi_{r-1} = \xi_r \cdot p_r$

(VII *a*) $m_r = \dfrac{1+p_r}{2}\ \xi_r$

Ejemplo 9:

Deben doblarse:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 1\ \phi\ {}^3/_4'' = 2{,}85\ \text{cm}^2. \\ 1\ \phi\ {}^7/_8'' = 3{,}88\ \text{cm}^2. \end{array}\right\} = 6{,}73\ \text{cm}^2 \\ 1\ \phi\ 1'' = 5{,}07\ \text{cm}^2 \end{array}\right\} = 11{,}80\ \text{cm}^2.$$

Se obtiene por las ecuaciones 4, VI *a*, VII *a*:

$$p_3 = \frac{6{,}73}{11{,}80} = 0{,}571$$

$$p_2 = \frac{2{,}85}{6{,}73} = 0{,}423$$

$\xi_3 = \xi$

$\xi_2 = \xi_3\ p_3 = 0{,}571\ \xi$

$\xi_1 = \xi_2\ p_2 = 0{,}571 .\ 0{,}423 \qquad = 0{,}242\ \xi$

$$m_3 = \frac{1 + 0{,}571}{2}\ \xi \qquad = 0{,}786\ \xi$$

$$m_2 = \frac{1 + 0{,}423}{2} .\ 0{,}571\ \xi = 0{,}408\ \xi$$

$$m_1 = \frac{1}{2}\ 0{,}242\ \xi \qquad = 0{,}121\ \xi$$

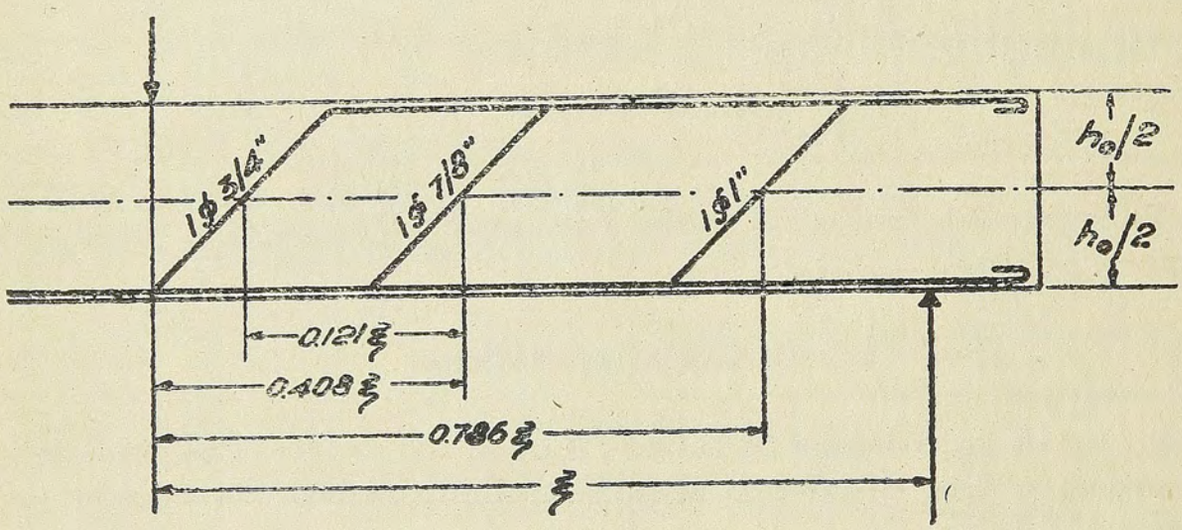


FIG. 10

El cuadro sinóptico N.° 4 sirve para la determinación inmediata de la distancia m_r en el caso más frecuente que se doblen barras de diámetros iguales. Referente a las distancias ξ_r también indicadas en el cuadro, vale lo que se ha dicho de las distancias c_r en en el caso de una carga repartida uniformemente.

Ejemplo 10:

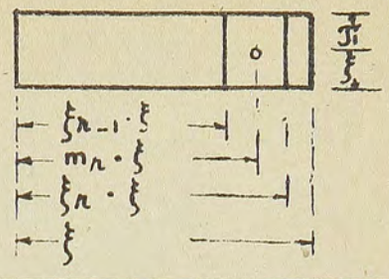
Deben doblarse 3 barras con diámetros iguales. El cuadro 4 demuestra inmediatamente:

$m_1 = 0{,}167\ \xi,$
$m_2 = 0{,}500\ \xi,$
$m_3 = 0{,}833\ \xi.$

Ejemplo 11:

Deben doblarse 5 barras con diámetros iguales, de las cuales 2 se doblan en la misma sección transversal de la pieza flexionada muy cerca del apoyo.

DISTANCIAS DE n BARRAS DOBLADAS DE IGUALES SECCIONES TRANSVERSALES PARA UNA CARGA CONCENTRADA.



n	θ	ξ_1	ξ_2	ξ_3	ξ_4	ξ_5	ξ_6	ξ_7	ξ_8	ξ_9	ξ_{10}
	m_1	m_2	m_3	m_4	m_5	m_6	m_7	m_8	m_9	m_{10}	
1	0.000	1.000									
	0.500										
2	0.000	0.500	1.000								
	0.250	0.750									
3	0.000	0.333	0.667	1.000							
	0.167	0.500	0.833.								
4	0.000	0.250	0.500	0.750	1.000						
	0.125	0.375	0.625	0.875							
5	0.000	0.200	0.400	0.600	0.800	1.000					
	0.100	0.300	0.500	0.700	0.900						
6	0.000	0.167	0.333	0.500	0.667	0.833	1.000				
	0.083	0.250	0.417	0.583	0.750	0.917					
7	0.000	0.143	0.286	0.429	0.571	0.714	0.857	1.000			
	0.071	0.214	0.357	0.500	0.643	0.786	0.929				
8	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875	1.000		
	0.063	0.188	0.313	0.438	0.563	0.688	0.813	0.938			
9	0.000	0.111	0.222	0.333	0.444	0.556	0.667	0.778	0.889	1.000	
	0.056	0.167	0.278	0.389	0.500	0.611	0.722	0.833	0.944		
10	0.000	0.100	0.200	0.300	0.400	0.500	0.600	0.700	0.800	0.900	1.000
	0.050	0.150	0.250	0.350	0.450	0.550	0.650	0.750	0.850	0.950	

Se puede sacar del cuanro 4 sin más:

$m_1 = 0{,}100\,\xi$,

$m_2 = 0{,}300\,\xi$,

$m_3 = 0{,}500\,\xi$,

y de la ecuación VII resulta:

$$m_{4+5} = \frac{1+\frac{3}{5}}{2}\,\xi = 0{,}800\,\xi.$$

valor que puede obtenerse inmediatamente de cuadro con $\xi_4 = 0{,}800\,\xi$.