# MECÁNICA RACIONAL

## SEGUNDA PARTE

### DE LOS SISTEMAS MATERIALES

*(Continuacion)*

### CAPÍTULO XIII

#### DETERMINACION DE LOS MOMENTOS DE INERCIA

Por definicion, el momento de inercia de un cuerpo respecto de un eje es la suma de los productos de la masa de cada punto del cuerpo por el cuadrado de su distancia al eje.

Se ha establecido mas arriba (cap. VI) que, a un cuerpo dado, corresponde en cada punto $O$ del espacio un elipsoide de inercia determinado: éste tiene la propiedad que el inverso del cuadrado de cada radio vector es el momento de inercia del cuerpo respecto al radio vector considerado.

Se ha establecido tambien que el momento de inercia de un cuerpo respecto a un eje cualquiera es igual al momento de inercia del mismo cuerpo, respecto a un eje paralelo que pasa por el centro de gravedad, mas el producto de la masa total del cuerpo por el cuadrado de la distancia de los dos ejes.

Se comprende así que, en cada caso particular, bastará conocer el elipsoide de inercia de un cuerpo en el centro de gravedad, para poder en seguida determinar el momento de inercia del cuerpo, respecto a un eje cualquiera.

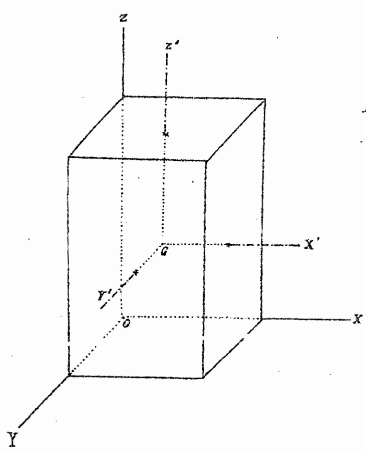
El elipsoide de inercia en el centro de gravedad será determinado si se conocen los tres momentos de inercia respecto a los ejes principales del centro de gravedad o simplemente los momentos de inercia respecto de tres ejes cualesquiera, paralelos a los primeros, puesto que de estos últimos se pueden deducir fácilmente los primeros.

*Paralelipípedo recto i homojéneo*

Sean $a$, $b$, $c$ las lonjitudes de las tres aristas dirijidas segun $OX$, $OY$, $OZ$ (fig. 50). Busquemos el momento de inercia $I_x$ del paralelipípedo respecto al eje $OX$, tendremos

$$I_x = \Sigma m(y^2 + z^2) = \rho \iiint (y^2 + z^2) dx dy dz$$

Fig. 51




Sumaremos primero los elementos situados en un prisma paralelo a $OX$ i tendremos

$$I_x = \rho \iint (y^2 + z^2)\ dy dz \int_0^a dx$$

$$= \rho a \iint (y^2 + z^2) dy dz$$

Sumaremos ahora todos los prismas análogos comprendidos entre $z$ i $z + dz$, entonces

$$Ix = \rho a \int dz \int_0^b (y^2 + z^2)\, dy = \rho a \int dz \left( \frac{b^3}{3} + bz^2 \right)$$

Finalmente, haremos variar $z$ entre $o$ i $c$, entonces

$$I_x = \rho a\left(c\frac{b^3}{3} + b\frac{c^3}{3}\right) = \rho abc\frac{b^2+c^2}{3}$$

Sea $M$ la masa total del paralelipípedo, tendremos

$$M = \rho abc$$

Luego

$$I_x = M\frac{b^2+c^2}{3}$$

Del mismo modo

$$I_y = M\frac{c^2+a^2}{3}$$

$$I_z = M\frac{a^2+b^2}{3}$$

Tracemos, por el centro de gravedad $G$, tres ejes paralelos a las aristas, estos seran, en este punto, los ejes principales de inercia; sean $A$, $B$, $C$ los tres momentos principales, tendremos

$$A = I_x - M\frac{b^2+c^2}{4} = M\frac{b^2+c^2}{12}$$

I, del mismo modo,

$$B = M\frac{c^2+a^2}{12}$$

$$C = M\frac{a^2+b^2}{12}$$

Con estos datos se puede calcular el momento de inercia I respecto de un eje cualquiera; sea, por ejemplo, un eje situado a una distancia $\Delta$ del centro de gravedad i sean $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ sus cosenos directores, respecto de los tres ejes principales se tendrá

$$\mathrm{I} = M\Delta^2 + \frac{M}{12}\left[\alpha^2 (b^2+c^2) + \beta^3 (c^2+a^2) + \gamma^2 (a^2+b^2)\right]$$

*Esfera*

Consideremos tres ejes rectangulares, cuyo oríjen sea el centro de la esfera, estos ejes serán siempre principales de inercia i los tres momentos principales son evidentemente iguales; sea $I$ su valor comun, tendremos

$$I=\Sigma m\,(y^2+z^2)=\Sigma m\,(z^2+x^2)=\Sigma m\,(x^2+y^2)$$

Luego

$$3\,I=2\,\Sigma m\,(x^2+y^2+z^2)$$

Designemos por $r$ la distancia de un punto al centro de la esfera i consideremos la porcion comprendida entre dos esferas de radios $r$ i $r+dr$; la masa de esta porcion será

$$4\pi\rho r^2 dr$$

Luego, para esta porcion de esfera, tenemos

$$\Sigma m\,(x^2+y^2+z^2)=4\pi\rho r^4 dr$$

Sea $R$ el radio de la esfera, tendremos

$$3\,I=2\int_0^R 4\pi\rho r^4 dr=8\pi\rho\frac{R^5}{5}$$

Luego

$$I=\frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

Sea tambien $M$ la masa total, se tiene

$$M=\frac{4}{3}\pi\rho\,R^3$$

Luego

$$I=\frac{2}{5}MR^2$$

NOTA.—El valor obtenido para $I$ permite escribir

$$\rho\iiint(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz=\frac{8}{15}\pi\rho R^5$$

Como los tres integrales

$$\iiint x^2 dx\,dy\,dz,\iiint y^2\,dx\,dy\,dz,\iiint z^2\,dx\,dy\,dz$$

son evidentemente iguales en el caso de la esfera, su valor comun será

$$\frac{4}{15}\pi R^5$$

*Elipsoide*

Sea

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

la ecuacion del elipsoide, $I_x$ su momento de inercia respecto de $OX$, se tiene

$$I_x=\rho\int\int\int(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$$

Hagamos

$$x=ax'$$

$$y=by'$$

$$z=cz'$$

Tendremos

$$x'^2+y'^2+z'^2=1$$

I tambien

$$I_x=\rho\,a\,b\,c\int\int\int(b^2y'^2+c^2z'^2)\,dx'\,dy'\,dz'$$

Las coordenadas $x'$ $y'$ $z'$ que figuran bajo el signo de integracion varían entre los límites correspondientes a una esfera de radio uno, tenemos por consiguiente, segun la nota anterior

$$\int\int\int y'^2dx'dy'dz'=\int\int\int z'^2dx'dy'dz'=\frac{4}{15}\pi$$

Por consiguiente

$$I_x=\frac{4}{15}\pi\rho\,a\,b\,c\,(b^2+c^2)$$

La masa total del elipsoide es

$$M=\frac{4}{3}\pi\rho\,a\,b\,c$$

Luego

$$I_x = M\frac{b^2+c^2}{5}$$

Del mismo modo

$$I_y = M\frac{c^2+a^2}{5}$$

$$I_z = M\frac{a^2+b^2}{5}$$

*Cilindro recto*

Supongamos el eje $OZ$ paralelo a los jeneratrices del cilindro; sean $\Omega$ el área de la base, $h$ la altura i $\rho$ la densidad constante, se tendrá

$$I_x = \rho\iiint(y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = \rho h\iint(y^2+\frac{h^2}{3})dx\,dy$$

$$I_y = \rho\iiint(z^2+x^2)\,dx\,dy\,dz = \rho h\iint(x^2+\frac{h^2}{3})dx\,dy$$

$$I_z = \rho\iiint(x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz = \rho h\iint(x^2+y^2)dx\,dy$$

Sea $d\omega$ el área elemental $dx\,dy$; la masa total del cilindro es

$$M = \Omega\,\rho\,h$$

Luego

$$I_x = \frac{M}{\Omega}\Sigma y^2 d\omega + M\frac{h^2}{3}$$

$$I_y = \frac{M}{\Omega}\Sigma x^2\,d\omega + M\frac{h^2}{3}$$

$$I_z = \frac{M}{\Omega}\Sigma\,(x^2+y^2)\,d\omega$$

Supongamos que la masa total del cilindro se condense uniformemente sobre la base, de tal manera que $h$ tienda hácia cero; en el límite se tendrá simplemente

$$(1) \qquad \begin{cases} I_x = \frac{M}{\Omega}\Sigma y^2 d\omega \\ I_y = \frac{M}{\Omega}\Sigma x^2 d\omega \\ I_z = \frac{M}{\Omega}\Sigma (x^2 + y^2)\, d\omega = I_x + I_y \end{cases}$$

Los momentos de inercia son ahora los de una seccion plana material.

MOMENTOS DE INERCIA DE LAS ÁREAS PLANAS

Por definicion, el momento de inercia de una área plana, respecto a un eje, es la suma de los productos de cada elemento de área por el cuadrado de su distancia al eje. Es una definicion puramente jeométrica; sin embargo, si se supone que, en todos los puntos del área, se ha condensado uniformemente cierta cantidad de materia, de tal manera que la unidad de área tenga una masa igual a la unidad, el momento de inercia, definido mas arriba, es precisamente el momento de inercia de la materia concentrada sobre la área.

Segun esta definicion, si $d\omega$ es un elemento de área en un punto $M$ del plano i $r$ la distancia de $M$ a cierto eje, el momento de inercia $I$ del área respecto al eje es:

$$I = \Sigma r^2 d\omega$$

Consideremos tres ejes rectangulares i supongamos que $XOY$ sea el plano del área; sean $I_x$, $I_y$, $I_z$ los momentos de inercia respecto de los tres ejes, se tendrá por definicion:

$$I_x = \Sigma y^2 d\omega$$

$$I_y = \Sigma x^2 d\omega$$

$$I_z = \Sigma (x^2 + y^2) d\omega = I_x + I_y$$

Estas son precisamente las fórmulas (1) en las cuales la razon $\frac{M}{\Omega}$ es igual a uno.

El momento de inercia $I_z$ no cambia evidentemente cuando los ejes $OX$ i $OY$ cambian de orientacion en su plano, luego la suma de los momentos de inercia de una área plana respecto a dos ejes rectangulares cualesquiera, situados en su plano, i que pasan por un mismo punto, es constante. Esta propiedad se establecerá directamente mas adelante.

### VARIACION DEL MOMENTO DE INERCIA CON LA POSICION DEL EJE

Aunque la lei de esta variacion puede deducirse de la teoría jeneral del capítulo VI, la estableceremos aquí directamente. Supondremos que los ejes considerados están situados en el plano del área.

Resolveremos en primer lugar el problema siguiente:

*Conociendo el momento de inercia de una área, respecto a un eje que pasa por su centro de gravedad, determinar su momento de inercia respecto a un eje paralelo.*

Sea $OX$ un eje que pasa por el centro de gravedad, $y$ la ordenada de un elemento $d\omega$; $O'X'$ un eje paralelo a $OX$, $b$ su distancia a $OX$ i la distancia de $d\omega$ a $O'X'$, se tiene

$$y' = y - b$$

Luego, si $\Omega$ es el área total

$$\Sigma y'^2 d\omega = \Sigma y^2 d\omega + b^2\Omega - 2b\Sigma y d\omega$$

El último término del segundo miembro es nulo, porque OX pasa por hipótesis por el centro de gravedad del área, luego

$$\Sigma y'^2 d\omega = \Sigma y^2 d\omega + b^2\Omega$$

### ELIPSE DE INERCIA

Sea $O$ un punto cualquiera del plano de la área; $OX$, $OY$ dos ejes rectangulares i $OP$ otro eje que hace con $OX$ un ángulo $\theta$; consideremos un elemento de área $d\omega$; sean $x, y$ sus coordenadas i $r$ su distancia a $OP$, se tiene

$$r = y \cos\theta - r \operatorname{sen}\theta$$

Luego

$$r^2 = y^2 \cos^2\theta - 2xy \text{ sen } \theta \text{ cs } \theta + x^2 \text{ sen }^2\theta$$

I tambien

$$\Sigma r^2 d\omega = \cos^2\theta \, \Sigma y^2 d\omega - 2 \text{ sen}\theta\cos\theta \, \Sigma xy d\omega + \text{ sen}^2\theta \Sigma x^2 d\omega$$

El primer miembro es el momento de inercia del área respecto a $OP$, lo representaremos por $I$; hagamos tambien

$$(2)\left\{\begin{aligned} \Sigma y^2 d\omega &= A \\ \Sigma xy d\omega &= B \\ \Sigma x^2 d\omega &= C \end{aligned}\right.$$

Tendremos

$$(3) \quad I = A \cos^2\theta - 2B \text{ sen } \theta \cos \theta + C \text{ sen }^2\theta$$

Sea $OP'$ un eje perpendicular a $OP$ e $I'$ el momento de inercia del área respecto a $OP'$. Se tendrá segun (3) i reemplazando $\theta$ por $\theta + 90^o$:

$$I' = A \text{ sen }^2\theta + 2B \text{ sen } \theta \cos \theta + \theta \cos^2\theta$$

Luego

$$I + I' = A + C$$

Es la propiedad establecida mas arriba: la suma de los momentos de inercia del área, respecto a dos ejes rectangulares cualesquiera que pasan por el punto $O$, es constante.

Tomenos ahora sobre $OP$ un punto $N$ tal que

$$ON = \frac{1}{\sqrt{I}}$$

Sean $X$, $Y$ las coordenadas de $N$ se tendrá segun (3)

$$(4) \quad 1 = AX^2 - 2BXY + CY^2$$

Es la ecuacion de una cónica, referida a su centro; como el momento de inercia I no puede ser igual a cero, $ON$ no puede ser infinito, luego todos los puntos de la cónica están a distancia finita de $O$; en resúmen esta cónica es una elipse. Esta se llama *elipse de inercia* en el punto $O$.

Cuando el punto $O$ es el centro de gravedad del área, la elipse de inercia se llama *elipse central de inercia.*

Si los ejes $OX$, $OY$ son los ejes principales de la elipse, el término en $XY$ de la ecuacion (4) debe desaparecer, luego se debe tener entónces

$$B = \Sigma xyd\omega = 0$$

En este caso, la elipse de inercia tiene por ecuacion

$$AX^2 + CY^2 = 1$$

i el momento de inercia I del área respecto a un eje $OP$ que hace un ángulo $\theta$ con $OX$, es

$$I = A \cos^2\theta + C \operatorname{sen}^2\theta$$

Si el punto $O$ es el centro de gravedad del área $e.n'$ i si $E\,F$ es un eje paralelo a $O\,P$, situado a la distancia $\Delta$ de $O$, el momento de inercia del área respecto a $E\,F$ es

$$\Sigma r^2 d\omega = \Omega\ \Delta^2 + A \cos^2\ \theta + C \operatorname{sen}^2\ \theta$$

Los ejes principales de inercia del centro de gravedad se llaman tambien ejes centrales de inercia.

*Forma de la elipse de inercia en los diferentes puntos del plano*

Supongamos que el punto $O$ sea el centro de gravedad del área; $O\,X$, $O\,Y$ los ejes centrales de inercia, la elipse central tendrá por ecuacion

$$AX^2 + CY^2 = 1$$

Sean $a$ i $b$ las coordenadas de otro punto $O'$ del plano; $O'\,X'$, $O'\,Y'$ dos ejes paralelos a los primeros; la elipse de inercia del área en el punto $O'$ tendrá una ecuacion de la forma

$$A'\ X'^2 - 2\ B'\ X'\ Y' + C'\ Y'^2 = 1$$

Se tiene ahora

$$A' = A + b^2 \Omega$$

$$C' = C + a^2 \Omega$$

$$B' = \Omega x' y' d\omega = \Sigma (x - a)(y - b)\, d\omega$$

O bien

$$B' = \Sigma\, x y\, d\omega - a\, \Sigma y\, d\omega - b\, \Sigma x\, d\omega + ab\, \Omega$$

El primer término del segundo miembro es nulo porque $OX$ i $OY$ son direcciones principales en $O$, los dos términos siguientes son nulos porque $O$ es el centro de gravedad, luego

$$B' = ab\, \Omega$$

Se ve que $B'$ será nulo si una de las dos coordenadas $a$ o $b$ es nula, es decir, si el punto $O'$ está situado sobre uno cualquiera de los ejes $OX$ o $OY$; luego los únicos puntos del plano en los cuales las direcciones principales de inercia son paralelas a las del centro de gravedad son los puntos situados sobre los dos ejes centrales de inercia.

En varios casos, la direccion de los ejes centrales es conocida; por ejemplo, si la figura plana tiene un eje de simetría, este es un eje central en todos los puntos situados sobre este eje; en efecto, si el eje $OY$ es un eje de simetría de la figura, se tiene evidentemente

$$\Sigma x y\, d\omega = o$$

Luego

$$B = o$$

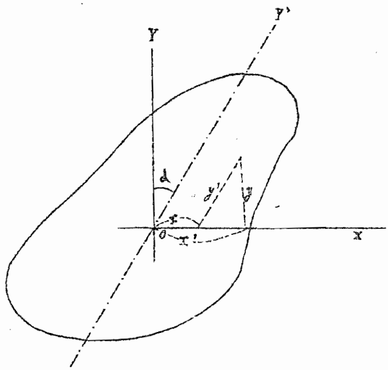
*Propiedad de los diámetros*

Sea una área plana i $OY'$ un diámetro conjugado de las cuerdas paralelas a $OX$; si los puntos del área se refieren a los dos ejes oblícuos $OX$ i $OY'$, i si $x'$ $y'$ son las coordenadas oblícuas de un elemento $d\omega$ se tiene evidentemente

$$\Sigma x' y'\, d\omega = o \tag{5}$$

Sean $x, y$ las coordenadas rectangulares del mismo elemento respecto a $OX$ i $OY$ i $\alpha$ el ángulo $YOY'$, se tiene

Fig. 52




$$x' = x - y \ tg \ \alpha$$

$$y' = y \sec \alpha$$

Luego

$$\Sigma \ x' \ y' \ d\omega = \sec \alpha \ \Sigma xy \ d\omega - \sec \alpha \ tg \ \alpha \ \Sigma y^2 \ d\omega$$

O bien segun (5)

(6) $$\Sigma \ x \ y \ d\omega - tg \ \alpha \ \Sigma \ y^2 \ d\omega = 0$$

Sea ahora

$$A \ X^2 - 2 \ B \ X \ Y + C \ Y^2 = 1$$

la ecuacion, respecto de los ejes rectangulares de la elipse de inercia en el punto $O$, la relacion (5) es equivalente a la siguiente

$$B - A \ tg \ \alpha = 0$$

Esta relacion espresa que, en la elipse de inercia del punto $O$, $O \ Y'$ es un diámetro conjugado de las cuerdas paralelas a $O \ X$.

La misma propiedad se aplica a todos los puntos del diámetro $O \ Y'$ i en particular al centro de gravedad, situado evidentemente sobre este diámetro.

APLICACIONES

Rectángulo.

Sean $a$ i $b$ los dos lados del rectángulo dirijidos segun $O \ X$ i $O \ Y$; busquemos en primer lugar los momentos de inercia respecto de $O \ X$ i $O \ Y$; se tendrá

$$I_x = \Sigma \ y^2 \ d\omega = \int\int y^2 \ d\lambda \ dy$$

I, aplicando la regla jeneral de integracion

$$I_x = \int y^2 dy \int_0^a d_x = a \int_0^b y^2 dy = a\frac{b^3}{3}$$

Del mismo modo

$$I_y = b\frac{a^3}{3}$$

El área total del rectángulo es

$$\Omega = ab$$

Luego

$$I_x = \Omega\frac{b^2}{3}$$

$$I_y = \Omega\frac{a^2}{3}$$

Consideremos ahora dos ejes $GX'$, $GY'$ paralelos a los primeros i que pasan por el centro de gravedad $G$; sean $A$ i $B$ los momentos de inercia correspondientes, estos son evidentemente los momentos de inercia principales, se tendrá

$$A = I_x - \Omega\frac{b^2}{4} = \Omega\frac{b^2}{12}$$

$$B = I_y - \Omega\frac{a^2}{4} = \Omega\frac{a^2}{12}$$

Luego la elipse central de inercia, tiene por ecuacion

$$\frac{\Omega}{12}(b^2 X^2 + a^2 Y^2) = 1$$

Sus ejes son precisamente proporcionales a los lados correspondientes del rectángulo, luego la elipse es semejante de otra inscrita en el rectángulo.

El momento de inercia $I$ del rectángulo respecto de un eje, situado a la distancia $\Delta$ del centro de gravedad en una direccion tal que su ángulo con $GX'$ es $\theta$, es

$$I = \Omega\Delta^2 + \frac{\Omega}{12}(b^2 \cos^2\theta + a^2 \operatorname{sen}^2\theta)$$

*Círculo*

Consideremos dos ejes rectangulares $OX$, $OY$ cuyo oríjen esté en el centro del círculo; los dos momentos de inercia son evidentemente iguales i su valor comun es la mitad del momento de inercia respecto del eje $OZ$ perpendicular al plano del círculo.

En resúmen sea $I$ el momento de inercia de un círculo respecto a uno de sus diámetros, $r$ la distancia de uno de los elementos al centro, se tiene

$$2I = \Sigma r^2 d\omega$$

Consideremos los puntos del círculo comprendidos entre dos circunferencias de radios $r$ i $r+dr$, el área de esta corona es

$$d\omega = 2\pi r dr$$

Luego, si $R$ es el radio del círculo, se tendrá

$$2I = 2\pi\int_0^R r^3 dr = 2\pi\frac{R^4}{4}$$

(7) $$I = \pi\frac{R^4}{4}$$

El área $\Omega$ del círculo es

$$\Omega = \pi R^2$$

Luego

$$I = \Omega\frac{R^2}{4}$$

*Elipse*

Sea

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

la ecuacion de la elipse, referida a su centro, el momento de inercia respecto del eje $OX$ será

$$I_x=\iint y^2\,dx\,dy$$

Hagamos todavia

$$x=ax'$$

$$y=by'$$

Tendremos

$$I_x=ab^3\iint y'^2\,dx'\,dy'$$

Como

$$x'^2+y'^2=1$$

la integral doble representa el momento de inercia de un círculo de radio uno respecto de uno de sus diámetros, luego su valor es segun (7) igual a $\frac{\pi}{4}$ i se tiene

$$I_x=\frac{\pi}{4}ab^3$$

El área total es

$$\Omega=\pi ab$$

Luego

$$I_x=\Omega\frac{b^2}{4}$$

Se obtendria de la misma manera

$$I_y=\frac{\Omega a^2}{4}$$

La elipse de inercia tiene por ecuacion

$$\frac{\Omega}{4}(b^2 X^2 + a^2 Y^2) = 1$$

Se vé que esta elipse es semejante a la elipse propuesta

*Paralélogramo*

Sean $a$ i $b$ los dos lados del paralelogramo i $\theta$ el ángulo que hacen entre ellos; el momento de inercia del paralelogramo respecto del lado $a$ será evidentemente el mismo que el momento de inercia de un rectángulo de altura $b$ sen $\theta$, luego podemos escribir

$$I_a = \Omega \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{3}$$

I, del mismo modo

$$I_b = \Omega \frac{\theta^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{3}$$

El centro de gravedad del paralelograma es su centro de figura, consideremos en este punto dos ejes $OX$, $OY$ paralelos a los lados $a$ i $b$; como estos ejes son diámetros del paralelograma, la elipse central tendrá dos diámetros conjugados dirijidos segun $OX$, $OY$; los momentos de inercia correspondientes serán, como en el caso del rectángulo,

$$I_x = \Omega \frac{b^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{12}$$

$$I_y = \Omega \frac{a^2 \operatorname{sen}^2 \theta}{12}$$

Luego la elipse central, referida a los dos ejes oblícuos $OX$, $OY$ tendrá por ecuacion

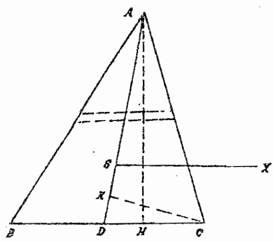
$$\frac{\Omega \operatorname{sen}^2 \theta}{12}(b^2 X^2 + a^2 Y^2) = 1$$

Esta elipse es semejante de otra elipse inscrita en el paralelogramo

*Triángulo*

Busquemos, en primer lugar, el momento de inercia respecto de un lado. Sea (fig. 53) el triángulo $ABC$, $a$ la lonjitud del lado $BC$ i $h$ la altura correspondiente $AH$; consideremos un elemento de área comprendida entre dos paralelas a $BC$, sea $a'$ la base de este trapecio infinitamente pequeño, $x$ su distancia a $BC$ i $dx$ su altura; $I_a$ el momento de inercia buscado, se tendrá

Fig. 53




$$I_a = \int_0^h a' x^2 dx$$

Pero

$$\frac{a'}{a} = \frac{h-x}{h}$$

Luego

$$I_a = a\int_0^h \frac{h-x}{h} x^2 dx = a\int_0^h x^2 dx - \frac{a}{h}\int_0^h x^3 dx$$

O bien

$$I_a = a\frac{h^3}{3} - \frac{a}{h}\frac{h^4}{4} = \frac{ah^3}{12}$$

Finalmente, si $\Omega$ es el área del triángulo

(8) $$I_a = \Omega\frac{h^2}{6}$$

Tracemos por el centro de gravedad una paralela $GX$ a $BC$

i sea $I_x$ el momento de inercia del triángulo respecto a $GX$, se tendrá

$$I_x = \Omega\frac{h^2}{6} - \Omega\left(\frac{h}{3}\right)^2 = \Omega\frac{h^2}{18}$$

La mediana $AD$ es un diámetro, luego las direcciones $GX$ i $GA$ seran las de dos diámetros conjugados de la elipse central; sea $I_y$ el momento de inercia del triángulo respecto a $GA$ i $CK = K$ la altura del triángulo $ACD$; el momento de inercia de $ABC$ sera igual a dos veces el momento de inercia de $ACD$, luego tendremos segun (8)

$$I_y = 2\frac{\Omega}{2}\frac{k^2}{6} = \Omega\frac{k^2}{6}$$

Si el triángulo es isóceles, $K$ es igual a $\frac{a}{2}$; sea $b$ el otro lado del triángulo, se tendrá tambien

$$h^2 = b^2 - \frac{a^2}{4}$$

Luego los dos momentos de inercia dirijidos segun $GX$ i $GA$ son entonces

$$I_x = \frac{\Omega}{18}\left(\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{4}\right)$$

$$I_y = \Omega\frac{a^2}{24}$$

Las dos direcciones $GX$ i $GA$ son entónces perpendiculares i son los ejes centrales del triángulo.

Si el triángulo es equilateral, se tiene $b = a$, luego

$$I_x = \Omega\frac{a^2}{24}$$

$$I_y = \Omega\frac{a^2}{24}$$

ALBERTO OBRECHT

*(Continuará)*